Erweiterung partieller Automorphismen

Bernhard Herwig
Juni 1998

Abstract
Dies ist eine Übersicht über Arbeiten über Erweiterungen partieller Automorphismen. Ein Beispiel aus diesem Bereich ist der folgende Satz von Hrushovski:

Sei A ein endlicher Graph. Es gibt einen endlichen Erweiterungsgraphen B von A, so dass sich jeder partielle Automorphismus des Graphen A zu einem Automorphismus von B fortsetzen lässt.

Die Beweise sind überwiegend kombinatorischer Natur und teilweise sehr umfangreich. Es werden hier nur ein paar Beweise skizziert. Anwendungen der Sätze sind unter anderem die "Small Index Property" für Automorphismengruppen gewisser homogener abzählbarer Strukturen und topologische Eigenschaften der mit der profiniten Topologie versehenen freien Gruppen.

Der uneingeschränkte Fall

Definition: Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Strukturen in einer festen relationalen Sprache S.
a) Eine endliche Struktur A aus $\mathcal{K}$ zusammen mit endlich vielen partiellen Automorphismen $f_1, \ldots f_n$ nennen wir eine (endliche) Erweiterungsaufgabe für $\mathcal{K}$.
b) Eine Struktur B zusammen mit einer Einbettung ι von A nach B und zusammen mit Automorphismen $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ von B heisst eine Lösung der Erweiterungsaufgabe, wenn B zu $\mathcal{K}$ gehört, und wenn $\iota^{-1} \cdot f_i \cdot \iota \subseteq \alpha_i$ (für $1 \leq i \leq n$).
c) $\mathcal{K}$ hat die Erweiterungeigenschaft für partielle Automorphismen (EPPA), wenn jede endliche Erweiterungsaufgabe für $\mathcal{K}$ die eine (möglicherweise unendliche) Lösung hat, auch eine endliche Lösung hat.

Für viele Klassen $\mathcal{K}$ hat jede endliche Erweiterungsaufgabe eine unendliche Lösung. Für solche Klassen ist also die (EPPA) äquivalent zu der Aussage "Jede Erweiterungsaufgabe für $\mathcal{K}$ hat eine endliche Lösung". In den ersten Arbeiten ([Hr],[Hg1],[Hg2]) werden nur solche Klassen betrachtet. Erst in der Zusammenarbeit mit Daniel Lascar haben wir auch Klassen betrachtet, für die unendliche Lösungen nicht notwendig existieren. Dort haben wir die (EPPA) in ihrer jetzigen Form definiert und ihre Relevanz nachgewiesen.

Die Geschichte der Sätze über Erweiterung partieller Isomorphismen beginnt mit der Untersuchung der Automorphismengruppe des Zufallsgraphen. Der Zufallsgraph ist der abzählbare homogene Graph, in den jeder endliche Graph einbettbar ist (bis auf Isomorphie gibt es nur einen Graphen mit diesen Eigenschaften).

Nebenbei zeigt die Existenz des Zufallsgraphen auch dass jede Erweiterungsaufgabe in der Klasse der Graphen eine unendliche Lösung hat: Man bette den endlichen Graphen einfach in den Zufallsgraphen ein. Dort lässt sich nun wegen der Homogenität des Zufallsgraphen jeder partielle Autorphismus des endlichen Graphen zu einem Automorphismus des Zufallsgraphen fortsetzen.

John Truss hat in [Tr] nachgewiesen, dass jede Erweiterungsaufgabe bestehend aus einem Graphen A und nur einem partiellen Isomorphismus f_1 eine endliche Lösung hat. Er hat diese Aussage dazu verwendet zu beschreiben, wie ein generischer Automorphismus des Zufallsgraphen aussieht. Wir werden etwas später noch erklären was generische Automorphismen sind.

Später haben Hodges et. al. [HHLS] bei Ihrer Arbeit über die Small Index Property (SIP) des Zufallsgraphen erkannt, dass für diese die endliche Lösbarkeit beliebiger Erweiterungsaufgaben in der Klasse der Graphen wichtig ist. Auf einer Konferenz in Banff (Alberta, 1991) wurde dies daher als Frage formuliert. Hrushovski beantwortete die Frage positiv:

Satz 1 *([Hr]) Die Klasse aller Graphen hat die (EPPA): Jede Erweiterungsaufgabe hat eine endliche Lösung.*

Der Beweis, den Hrushovski in seiner Arbeit präsentiert, ist aus heutiger Sicht zu kompliziert. Er liefert einen Erweiterungsgraphen, dessen Grösse doppelt exponentiell in der Grösse des Ausgangsgraphen wächst. Einen wesentlich einfacheren Beweis findet man in [HL]. Dieser hat zusätzlich den Vorteil, dass die Schranke für die Grösse des Erweiterungsgraphen (in der Grösse k des Ausgangsgraphen) durch nur $(c \cdot k)^k$ beschränkt ist, wobei c die Konstante $(3 \cdot e)/4$ ist. Man weiss aus theoretischen Überlegungen [Hr], dass man ein exponentielles Wachstum nicht vermeiden kann.

Der ursprüngliche Beweis von Hrushovski hat aber auch seine Vorteile: Viele der späteren Erweiterungssätze haben ausschliesslich Beweise, die auf den Beweisideen von Hrushovski fussen. Die Struktur, die Hrushovski konstruiert, ist von der Form $(A \times \Gamma/\equiv)$, wobei Γ eine endliche von n ausgezeichneten Elementen erzeugte Gruppe und $\equiv$ eine geeignete Äquivalenzrelation ist. Γ operiert auf dieser Struktur, und die ausgezeichneten Erzeugenden werden die Fortsetzungen der partiellen Automorphismen.

Eine Beweisskizze des Beweises in [HL]:

Man bette den gegebenen endlichen Graphen in geeigneter Weise in einen grösseren Graphen mit sehr vielen Automorphismen ein: genauer nehme man eine Menge X und eine Zahl k (k ist eine Schranke für die Valenz des Ausgangsgraphen) und betrachte den Graphen, dessen Punkte aus den k-elementigen Teilmengen von X besteht. Zwei solche Punkte sollen in Kantenrelation stehen, wenn sie nichtleeren Schnitt haben. Die symetrische Gruppe der Bijektionen von X operiert auf diesem Graphen; partielle Isomorphismen von X, die zusätzlich die Grösse des Schnittes zweier Punkte des Graphen respektieren, lassen sich zu Automorphismen fortsetzen. Jetzt muss man nur noch den Ausgangsgraphen so einbetten, dass diese Schnittgrösse stets 1 (oder 0) ist.

Beide Beweise des Satzes von Hrushovski lassen sich leicht auf die Klasse aller Strukturen mit einer 2-stelligen Relation übertragen. Hrushovski konnte aber seinen Beweis nicht auf die Klasse aller S-Strukturen in einer beliebigen relationalen Sprache S übertragen. Daher formulierte er das als Frage in [Hr]:

Satz 2 *Sei S eine relationale Sprache und $\mathcal{K}$ die Klasse aller S-Strukturen. Jede Erweiterungsaufgabe für $\mathcal{K}$ hat eine endliche lösung.*

Dieser Satz wird in [Hg1] bewiesen. Die Grundideen des Beweises soll hier am Beispiel eines 3-stelligen Relationssymbols R erläutert werden: Für jedes Element a des Ausgangsgraphen A betrachte man die 2-stellige Relation R_a definiert durch $(b,c) \in R_a$ gdw $(a,b,c) \in R$. Das erste Problem ist, dass die partiellen Isomorphismen $f_1, \ldots, f_n$ nicht mehr partielle Isomorphismen in der neuen Sprache sind; man kann sie als "Permorphismen" auffassen: Sie permutieren zusätzlich die Sprache. Dazu muss zunächst mittels einer Konstruktion wie in Hrushovskis Beweis die Sprache vergrössert werden, damit die Funktionen wirklich Bijektionen der Sprache werden (und nicht nur partielle Funktionen der Sprache). Im Anschluss daran muss man noch einmal den Beweis von Hrushovski nachmachen (jetzt für unsere endliche binäre Sprache) und bekommt totale Permorphismen der binären Struktur. Für den letzten Schritt behält man nur die von diesen Permorphismen erzeugte Gruppe Γ und bildet wieder eine $\{R\}$–Struktur der Form $A \times \Gamma/_{\equiv}$. Für k-stellige Relationen muss man obiges Verfahren natürlich $(k-2)$ mal iterieren.

In [HL] findet sich ein einfacherer Beweis dieses Satzes. Aber obiger Beweis liefert eine Lösung, die eine weitere Eigenschaft (*) hat, die sich später noch als wichtig herausstellen wird:

Wir bezeichnen mit A zusammen mit $f_1, \ldots, f_n$ die Erweiterungsaufgabe und mit B und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Lösung. Wir betrachten die von $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ erzeugte Gruppe G die auf B operiert. Die angesprochene Eigenschaft ist nun, dass für jedes $b_1, b_2 \in A$ und jedes $\beta \in G$ wenn $b_1^\beta = b_2$, dann gibt es ein Wort $w = f_1^{\epsilon_1} \ldots f_t^{\epsilon_t}$ in $f_1, f_1^{-1}, \ldots, f_n, f_n^{-1}$, so dass $b_1^w = b_2$ (hierbei wird w als partieller Isomorphismus betrachtet), und so dass $w(\alpha) = \beta$. $w(\alpha)$ ist dabei das Wort, dass aus w ensteht, wenn man jedes f_i durch α_i ersetzt.

Eigenschaft (*) kann man kurz so paraphrasieren: Zwei Elemente aus der Ausgangsstruktur sind nur dann durch ein Gruppenelement konjugiert zueinander, wenn dies schon zwingend aus den gegebenen Daten folgt.

In [HL] werden Lösungen, die die Eigenschaft (*) (und weitere weniger wichtige Eigenschaften) haben, spezielle Lösungen genannt.

Man kann auch aus einer beliebigen Lösung eine Lösung gewinnen, die zusätzlich Eigenschaft (*) hat, aber das ist schon komplizierter (siehe [HL]).

Satz 2 bezeichne ich als den uneingeschränkten Fall, da die Klasse $\mathcal{K}$ durch keine weiteren Einschränkungen (neben der Einschränkung S-Struktur zu sein) spezifiziert ist. Das macht die Arbeit leichter, da man nicht zusätzlich eine Struktur in einer eingeschränkten Klasse als Lösung finden muss. Übrigends folgt Satz 1 leicht aus Satz 2.

Es sei noch eine weitere Bemerkung angefügt: Der Beweis von Truss liefert als Lösung eine Menge B und einen Automorphismus α_1 der nicht von allen Ausgangsdaten abhängt. Genauer hängt B und α_1 nur von der Menge A und dem partiellen Automorphismus f_1 ab, nicht aber von der tatsächlichen Struktur auf A.

Der von Hrushovski konstruierte Graph dagegen hängt auch von der Graphenstruktur ab. Satz 2 liefert nun auch wieder die Existenz einer Lösung die nicht von der Struktur abhängt: Man versehe einfach A mit aller Struktur die durch die partiellen Isomorphismen invariant gelassen wird. Wendet man Satz 2 auf diese Struktur an, so bekommt man eine struktur-unabhängige Lösung.

Die Small Index Property

Die Automorphsimengruppe G einer abzählbaren Struktur wird mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen. Wir sagen, eine solche Gruppe hat die Small Index Property (SIP), wenn die offenen Untergruppen genau die von abzählbarem Index sind. In diesem Fall kann man die Topologie der Gruppe schon aus der Gruppe ablesen. Dies ist wichtig, wenn man die Struktur aus ihrer Automorphismengruppe rekonstruieren will.

In [HHLS] wird unter Zuhilfenahme des Satzes von Hrushovski (Satz 1) gezeigt, dass der Zufallsgraph die SIP hat. Hierbei wird die Technik der generischen Automorphismen verwendet. Ein Tupel von Automorphismen $(g_1, \ldots, g_n)$ heisst dabei generisch, wenn $\{(g_1^\beta, \ldots, g_n^\beta) \mid \beta \in G\}$ comager in G^n ist.

Dieser Beweis überträgt sich auch auf andere homogene Strukturen: Wir betrachten eine Klasse $\mathcal{K}_0$ endlicher Strukturen in einer endlichen Sprache, und nehmen an, dass diese Klasse die Amalgamation Property (AP) und die Joint Embedding Property (JEP) hat (siehe [Ca]). Dies sind gerade die Eigenschaften die wir brauchen um die Existenz einer abzählbaren homogenen Struktur für diese Klasse zu sichern, die wir mit M_0 bezeichnen wollen. Diese Konstruktionsmethode geht auf Fraïssé zurück ([Fr]). Wir bezeichnen M_0 auch als den Fraïssé–Limes von $\mathcal{K}_0$.

Wir wollen nun untersuchen, ob $\mathrm{Aut}(M_0)$ generische Tupel von Automorphismen hat, und wie diese aussehen. $(g_1, \ldots, g_n)$ heisst lokal endlich, wenn für jedes $a \in M_0$ der Orbit von a unter $< g_1, \ldots, g_n >$ endlich ist.

Satz 3 *([Hg2])* $\{(g_1, \ldots, g_n) \mid (g_1, \ldots, g_n)$ *lokal endlich* $\}$ *ist comager in* G^n *genau dann wenn jede Erweiterungsaufgabe für* $\mathcal{K}_0$ *eine endliche Lösung hat.*

Wir wollen hier den Teil des Beweises skizzieren der die Lösbarkeit der Erweiterungsaufgaben benutzt: Sei also $a \in M_0$. Zu zeigen ist Offenheit und Dichtheit von $\{(g_1, \ldots, g_n) \mid a^{<g_1,\ldots,g_n>}$ endlich$\}$. Für die Dichtheit nehmen wir uns eine Basis–offene Menge $\{(h_1, \ldots, h_n) \mid f_1 \subseteq h_1, \ldots, f_n \subseteq h_n\}$ wobei die f_i feste endliche partielle Automorphismen von M_0 sind. Wir wählen eine endliche Teilmenge A von M_0 so gross, dass $a \in A$ und $h_1, \ldots, h_n$ partielle Automorphismen von A sind. Diese Erweiterungsaufgabe hat abstrakt eine endliche Lösung in $\mathcal{K}_0$ und wegen den Eigenschaften von M_0 daher auch eine in M_0. Diese Lösung setzen wir zu Automorphismen von M_0 fort und haben daher ein Tupel in $\{(g_1, \ldots, g_n) \mid a^{<g_1,\ldots,g_n>} \text{ endlich}\} \cap O$ gefunden. ∎

Wir nehmen im folgende an, dass in der Klasse $\mathcal{K}_0$ alle Erweiterungsaufgaben eine endliche Lösung haben. Es ist also klar, dass wir nun die generischen Tupel unter den lokal endlichen Tupeln zu suchen haben.

Wir wollen zusätzlich annehmen, dass für jede natürliche Zahl n auch die Klasse $\mathcal{K}_0^n = \{(A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{Aut}(A)\}$ (AP) und (JEP) hat. Dies ist in der Praxis meist automatisch der Fall. Unter diesen weiteren Voraussetzungen kann man die generischen Automorphismen genauer beschreiben. Wir bilden den Fraïssé–Limes von $\mathcal{K}_0^n$ und erhalten eine Struktur $(M, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, wobei $M \simeq M_0$ (auch dies folgt aus der endlichen Lösbarkeit von Erweiterungsaufgaben in $\mathcal{K}_0$). Die generischen Tupel von Automorphismen von M_0 sind dann genau die $(g_1, \ldots, g_n)$ mit $(M_0, g_1, \ldots, g_n) \simeq (M, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Insgesamt folgt nun mit den Methoden in [HHLS], dass unter den gemachten Voraussetzungen die SIP für M_0 gilt (siehe auch Theorem 11 in [Hg2]).

Aus Satz 2 folgt damit, dass für jede endliche relationale Sprache S, der Fraïssé–Limit der Klasse aller endlichen Strukturen die SIP hat. Selbst nach dem dieses Ergebnis bekannt wurde, kannte man erst abzählbar viele abzählbare Strukturen für die die SIP nachgewiesen werden konnte. Andererseits kennt man durch Arbeiten von Henson [Hen] und Peretyat'kin [Pe] 2^ω viele ω–kategorische Strukturen, die jeweils als Fraïssé–Limes konstruiert wurden. In Oberwolfach 1994 wurde dann auch die Frage gestellt, ob es 2^ω viele verschiedene ω–kategorische abzählbare Strukturen gibt, die die SIP haben.

Diese Frage wird positiv in [Hg2] beantwortet, indem für die Klassen endlicher gerichteter Graphen, die Henson verwendet hat, nachgewiesen wird, dass alle Erweiterungsaufgaben eine endliche Lösung haben. Nach dem weiter oben besprochenen folgt damit die SIP der Fraïssé–Limites.

Die Lösung dieser Erweiterungsaufgaben ist dabei kombinatorisch sehr verwickelt. Ich will hier statt dessen den Beweis skizzieren, dass in der Klasse der K_4–freien Graphen jede Erweiterungsaufgabe eine Lösung hat (K_4 ist dabei der vollständige Graph mit 4 Punkten; der K_3–freie Fall wird schon in [Hg1] behandelt). Die von Henson betrachteten Klassen gerichteter Graphen sind nicht zu verschieden von den Klassen der K_n–freien Graphen.

Zunächst führt man für jeden Punkt a des Graphen eine Farbe U_a ein, und färbt alle Nachbarn des Punktes mit dieser Farbe. Jetzt muss man wieder mit einem dem ursprünglichem Beweis von Hrushovski ähnlichen Verfahren die Sprache so vergrössern, dass die gegebenen partiellen Automorphismen Permorphismen werden. Die K_4–Freiheit übersetzt sich nun in: es lässt sich kein einfarbiger K_3 einbetten. Nun kann man die Methode aus [Hg1] verwenden, um einen gefärbten endlichen Erweiterungsgraphen zu finden, der frei von einfarbigen K_3 ist, und auf den sich jeder der gegebenen partiellen Permorphismen zu einem totalen Permorphismus fortsetzen lässt. Zusätzlich soll die Eigenschaft (*) aus dem ersten Kapitel gelten. Das überraschende ist nun, dass der resultierende Graph automatisch K_4–frei ist. Der Grund ist, dass er wegen der Eigenschaft (*) in gewissem Sinne lokal wie der Ausgangsgraph aussieht. Auch die neuen Nachbarn eines Punktes a des Ausgangsgraphen haben die Farbe U_a. Gäbe es nun eine K_4–Kopie in dem Graphen, so könnte man diese so verschieben, dass zumindest einer der Punkte – nennen wir ihn b – im Ausgangsgraphen liegt. Damit würden aber die anderen Punkte einen einfarbig U_b–gefärbten K_3 bilden, was ein Widerspruch ist. Diese lokale Ähnlichkeit spielt auch in allen späteren Beweisen eine Rolle.

Die freien Gruppen

Als Daniel Lascar von den bisher erwähnten Sätzen über die Erweiterung partieller Automorphismen hörte, hatte er die Idee, dass man die Beweise vielleicht wesentlich dadurch vereinfachen könnte, das man Sätze über die freie Gruppe verwendete. Tatsächlich liess sich ein neueres Ergebnis von Ribes and Zalesskii ([RZ]) verwenden, um kurze Beweise einiger dieser Sätze zu führen.

Wir merkten dann, dass wir stärkere Sätze als den von Ribes und Zalesskii brauchen würden, um den stärksten bis jetzt bekannten Erweiterungssatz zu beweisen. Zusätzlich stellte sich heraus, dass man auch umgekehrt die Erweiterungssätze benutzen kann um solche Sätze über die freie Gruppe zu beweisen. Ich werde nun zunächst die hier relevanten Sätze über die freie Gruppe vorstellen.

Sei n eine natürliche Zahl und sei F die frei von n Elementen $x_1, \dots, x_n$ erzeugte Gruppe. Wir versehen F mit der profiniten Topologie. Ein alter Satz von M. Hall [Ha] besagt gerade, dass endlich erzeugte Untergruppen abgeschlossene Teilmengen von F sind. Eine Verallgemeinerung ist:

Satz 4 *(Ribes, Zalesskii [RZ]) Seien $H_1, \dots, H_s$ endlich erzeugte Untergruppen der freien Gruppe F. Dann ist $H_1 \cdot \dots \cdot H_s$ abgeschlossen in F.*

In [HL] wird dargelegt, wie dieser Satz verwendet werden kann, um Erweiterungssätze zu zeigen. Tatsächlich gibt es einen Erweiterungssatz der in gewisser Weise äquivalent zum Satz von Ribes und Zalesskii ist. Dazu müssen wir die Klasse der s-zykelfreien, s-partitionierten gerichteten Graphen einführen.

Definition: Sei s eine feste natürliche Zahl. Ein mit s Farben $U_0, \dots, U_{s-1}$ versehener gerichteter Graph gehört zur Klasse $\mathcal{K}_s$ der s-zykelfreien s-partitionierten gerichteten Graphen, wenn
a) die Farben partitionieren die Punktmenge des Graphen,
b) es sind nur dann Kanten zwischen Punkten der Farben U_i und U_j erlaubt, wenn $j \equiv i + 1$ modulo s,
c) es gibt keinen Zykel $a_0, \dots, a_s$ von Elementen, so dass $a_0 = a_s$ und es eine Kante von a_i nach a_{i+1} gibt (für $0 \leq i < s$).

Diese Klasse $\mathcal{K}_s$ hat nicht die (AP) und tatsächlich ist nicht jede Erweiterungsaufgabe lösbar. Aber $\mathcal{K}_s$ hat die (EPPA). Den direkten Nachweis dafür findet man in [HL]. Ich will hier nur skizzieren, wie die (EPPA) dieser Klasse verwendet werden kann, um einen relativ kurzen Beweis des Satzes von Ribes und Zalesskii zu geben.

Wir starten mit endlich erzeugten Untergruppen $H_1, \ldots, H_s$ von F und einem Element w nicht in $H_1 \cdot \ldots \cdot H_s$. Wir müssen eine offene Umgebung um w finden, die mit $H_1 \cdot \ldots \cdot H_s$ leeren Schnitt hat. Zunächst konstruieren wir einen unendlichen gerichteten Graphen M_1 in $\mathcal{K}_s$. Die Punkte von Farbe U_i sollen gerade die Nebenklassen modulo H_i sein. zwischen zwei Punkten $H_i g_1$ und $H_{i+1} g_2$ soll eine Kante liegen, wenn $H_i g_1 \cap H_{i+1} g_2 \neq \emptyset$ $(1 \leq i < s)$. Zwischen $H_s g_1$ und $H_1 g_2$ soll eine Kante liegen, wenn diese Kante keinen s-Zykel ermöglicht, d.h. wenn es keinen $s-1$ langen Kantenzug zwischen $H_1 g_2$ und $H_s g_1$ gibt. Man rechnet leicht nach, dass $w \notin H_1 \cdot \ldots \cdot H_s$ gerade zu einer Kante zwischen H_s und $H_1 w$ führt. Nun operiert F durch Rechtsmultiplikation auf M_1. Besonders interessieren uns die Automorphismen die zu den Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$ gehören und die wir auch wieder $x_1, \ldots, x_n$ nennen wollen.

Wir zeichnen eine hinreichend grosse (was das bedeutet wird erst später klar werden) Teilmenge von M_1 aus und betrachten die volle induzierte Struktur A auf dieser. A ist eine endliche Struktur in $\mathcal{K}_s$. Wir schränken nun die Automorphismen x_i soweit ein, dass die Einschränkungen $f_1, \ldots, f_n$ partielle Automorphismen von A sind. Wenn wir A gross genug gewählt haben, dann haben wir sichergestellt, dass z.B. $H_i^w = H_i w$ (eine Gleichung die in M_1 offensichtlich gilt) bereits in der Struktur A sichergestellt wird.

Nun hat die Erweiterungsaufgabe $(A, f_1, \ldots, f_n)$ eine Lösung (nämlich $(M_1, x_1, \ldots, x_n)$) und wegen der (EPPA) von $\mathcal{K}_s$ hat sie auch eine endliche Lösung: eine Erweiterungsstruktur B mit Automorphismen $g_1, \ldots, g_n$. Wir lassen die freie Gruppe F auf B operieren – x_i operiert dabei wie g_i. Sei K_i der Stabilisator des Elementes H_i von B. Haben wir A gross genug gewählt, so können wir jetzt folgern, dass $H_i \subseteq K_i$ (dazu müssen wir für jedes der gegebenen erzeugende v von H_i sicherstellen, dass $H_i^v = H_i v = H_i$ auch in B gilt). Ausserdem haben die K_i endlichen Index in F. Also ist $K_1 \cdot \ldots \cdot K_s$ abgeschlossen und offen, und wir sind fertig wenn wir zeigen können, dass $w \notin K_1 \cdot \ldots \cdot K_s$. Nehmen wir an, es gelte $w = k_1 \cdot \ldots \cdot k_s$ wobei $k_i \in K_i$. Es ist dann $H_1 w = H_1^w = H_1^{k_1 \ldots k_s} = H_1^{k_2 \ldots k_s}$ verbunden zu $H_2^{k_2 \ldots k_s} = H_2^{k_3 \ldots k_s}$ verbunden zu … verbunden zu H_s. Zusammen mit der Kante von H_s nach $H_1 w$ ergibt sich also ein Widerspruch zur s-Zyklenfreiheit.

Nun kommen wir zurück zu den Erweiterungsaufgaben. Eine Abbildung $h : A \longrightarrow B$ zwischen relationalen Strukturen heisst schwacher Homomorphismus, wenn für jede Relation R und jedes Tupel $\bar{a}$ von A aus $R\bar{a}$ auch $R(\bar{a})^h$ folgt. Wenn $\mathfrak{F}$ eine endliche Menge von Strukturen ist, so sagen wir A ist $\mathfrak{F}$–frei, wenn es kein B in $\mathfrak{F}$ gibt und keinen schwachen Homomorphismus $h : B \longrightarrow A$.

Satz 5 *([HL]) Sei $\mathfrak{F}$ eine endliche Menge von relationalen Strukturen in einer festen Sprache. Die Klasse aller $\mathfrak{F}$-freien Strukturen hat die (EPPA)*

Der rein kombinatorische Beweis dieses Satzes füllt beinahe die Hälfte von [HL]. Mit Hilfe dieses Satz lässt sich eine Verallgemeinerung des Satzes von Ribes und Zalesskii zeigen:

Satz 6 *([HL]) Seien $H_1, \ldots, H_s$ endlich erzeugte Untergruppen von F. Wir betrachten ein endliches System von Gleichungen der Form*

$$x \equiv w \ mod \ H_i \ oder \ x \equiv wy \ mod \ H_i$$

wobei x, y unbestimmte sind, und H_i für jede Gleichung eine der gegebenen endlich erzeugten Untergruppen ist und w für jede Gleichung ein Wort aus F ist.

Wenn dieses Gleichungssystem keine Lösung hat, dann existieren Untergruppen K_i mit endlichem Index, so dass $H_i \subseteq K_i$ und dass das Gleichungssystem immer noch keine Lösung hat, wenn man in ihm jede Gruppe H_i durch K_i ersetzt.

Diesen Satz folgert man in ähnlicher Weise aus Satz 5 wie den Satz von Ribes und Zalesskii aus der (EPPA) für $\mathfrak{K}_s$.

Es gibt noch eine Umformulierung des Satzes, der nicht mehr über die freie Gruppe spricht:

Satz 7 *([HL]) Sei P ein endliches Alphabet. Wir betrachten ein System von Gleichungen der Form:*

$$x \equiv vy \ (oder \ x \equiv v) \ mod \ < w_1, \ldots, w_t >$$

wobei x, y Unbestimmte sind, und $v, w_1, \ldots, w_t$ Wörter über $P \cup P^{-1}$ sind.

Falls für jede endliche Gruppe G und jede Interpretation der Elemente von P durch Gruppenelemente das Gleichungssystem eine Lösung hat, so gilt dies für jede Gruppe.

Der Grund ist, dass es dann sogar Wörten in $P \cup P^{-1}$ für die Unbestimmten einsetzen kann, so dass die Gleichungen in allen Gruppen gelten (oder äquivalent ausgedrückt: in der frei von P erzeugten Gruppe gilt).

Wir wollen noch einen Satz als Beispiel für die Korrespondenz zwischen Erweiterungssätzen und Sätzen über die freie Gruppe anfügen. Dazu definieren wir die ungerad–adische Topologie auf F als die Topologie die erzeugt wird von

$$\{Hg \mid g \in F, \ H \text{ normale Untergruppe von } F \text{ von ungeradem Index}\}$$

Eine offene Frage ist, ob folgendes Kriterium für endlich erzeugte Untergruppen H von F gilt: H ist abgeschlossen in der ungerad-adischen Topologie, genau dann wenn für jedes a mit a^2 auch a zu H gehört.

Ein Turnier ist ein gerichteter Graph, in dem je zwei Punkte in eine der beiden möglichen Richtungen mitinander verbunden sind.

Satz 8 *([HL]) Die Klasse der Turniere hat die (EPPA) genau dann, wenn für endlich erzeugte Untergruppen von F obiges Kriterium für die Abgeschlossenheit in der ungerad–adischen Topologie gilt.*

Weitere Anwendungen

Ich werde hier noch weitere Anwendungen kurz angeben.

Eine Gruppe G hat die separierte Untergruppeneigenschaft (SSP), wenn ein endliches Produkt von endlich erzeugten Untergruppen von G abgeschlossen ist in der profiniten Topologie. Coulbois zeigte mit den Methoden aus [HL], dass das freie Produkt von zwei Gruppen, die die SSP haben, wieder die SSP hat ([Co]). Hieraus folgt auch wieder leicht der Satz von Ribes und Zalesskii, weil die freie Gruppe ein freies Amalgam aus geeignet vielen Kopien der unendlich zyklischen Gruppe ist.

Ungefähr zur selben Zeit als Ribes und Zalesskii ihren Satz bewiesen, hat Ash die "Type II conjecture for finite monoids" von Rhodes bewiesen. Andererseits konnten auch zur selben Zeit Henckell et. al. [HMPR] nachweisen, dass diese Vermutung die Aussage des Satzes von Ribes und Zalesskii impliziert. In seiner Arbeit hat Ash auch einen stärkeren Satz über inevitable Graphen bewiesen ([Ash, Satz 2.1]). Nachdem Almeida und Delgado von unserer Arbeit gehört hatten, fanden sie einen anderen Beweis von Satz 6, der diesen Satz von Ash verwendet ([AD]).

In der unendlichen Kombinatorik wurde ein Erweiterungssatz für bipartite Graphen angewendet ([GGK]) um zu zeigen, dass es einen homogenen bipartiten homogenen Graphen gibt, dessen eine Seite abzählbar ist und dessen andere Seite die Grösse des Kontinuums hat. Der Erweiterungssatz folgt direkt aus Satz 2 (wobei man fuer die beiden Teile des bipartiten Graphen zwei einstellige Prädikate einführen muss) kann aber auch leicht aus dem Beweis in [Hr] hergeleitet werden.

Grohe ([Gr]) hat einen anderen Erweiterungssatz verwendet um eine Hierarchie für gewisse Erweiterungslogiken der ersten Stufe Logik im Bereich der endlichen Modelltheorie nachzuweisen.

Grädel ([Gl]) konnte Satz 2 verwenden um mit einem kurzen Beweis die (endliche Modell)–Eigenschaft des "guarded fragments" der ersten Stufe Logik nachzuweisen. Dieses "guarded fragment" wurde von Barwise eingeführt, um ein Fragment der ersten Stufe zu haben, in das sich viele Modal–Logiken einbetten lassen. In gewisser Weise war Grädels Ergebnis auch schon implizit in [AHN] enthalten.

Andréka et. al ([AHN]) haben den stärksten Erweiterungssatz aus [Hg2] verwendet um zu zeigen, dass jede Algebra aus gewissen Klassen zylindrischer Algebren stets auf einer endlichen Menge repräsentiert werden kann.

References

[AD] Almeida, Delgado: Sur les système d'équations avec contraintes dans un groupe libre, preprint, 1997,

[AHN] Andréka, Hodkinson, Németi: Finite algebras of relations are representable on finite sets, preprint, 1996,

[Ash] C. Ash: Inevitable graphs: a proof of type II conjecture and some related decision procedures, Int. J. Algebra and Computation 1 (1991), 127-146,

[Ca] P. Cameron: Oligomorphic Permutation Groups, LMSLNS 152, Cambridge University Press, 1990,

[Co] T. Coulbois: Free product, profinite topology and finitely generated subgroups, preprint, 1996,

[Fr] R. Fraïssé: Sur l'extension aux rélations de quelques propriété des ordres, Ann. Sci. l'École Norm. Sup. 71(1954) 361-388,

[Gl] E. Grädel: On the restraining power of guards, preprint, 1997,

[Gr] M. Grohe: Arity Hierarchies, Annals of Pure and Applied Logic 82(1996), 103-163,

[GGK] Goldstern, Grossberg, Kojman: Infinite Homogeneous Bipartite Graphs with Unequal Sides, Discrete Mathematics 149(1996), 69-82

[Ha] M. Hall: A topology for free groups and related groups, Ann. of Maths 52(1950), 127-139,

[HMPR] Henckel, Margolis, Pin, Rhodes: Ash's type II theorem, profinite topology and Malcev products, Part I, Int. J. Algebra and Computation 1(1991), 411-436,

[Hen] W. Henson: Countable Homogeneous Relational Structures and $\aleph_0$-categorical Theories, The Journal of Symbolic Logic 37(1972) 494-500,

[Hg1] B. Herwig: Extending Partial Isomorphisms, Combinatorica, 15(1995), 365-371,

[Hg2] B. Herwig: Extending partial isomorphisms for the small index property of many ω-categorical structures, preprint, 1996.

[HL] Herwig, Lascar: Extending Partial Isomorphisms and the Profinite Topology on the Free Groups, in preparation, 1997,

[HHLS] Hodges, Hodkinson, Lascar, Shelah: The Small Index Property for ω–stable, ω–categorical Structures and for the Random Graph, Journal of the LMS 48(1993), 204-218,

[Hr] E. Hrushovski: Extending Partial Isomorphisms of Graphs, Combinatorica 12(1992), 411-416,

[KM] Kaye, Macpherson: Automorphisms of First–Order Structures, Clarendon Press, Oxford, 1994,

[La] D. Lascar: Autour de la propriété du petit indice, Proc. London Math. Soc. 62(1991), 25-53,

[Pe] M.G. Peretyat'kin: On Countable Theories With a Finite Number of Denumerable Models, Algebra i Logika 12(1973), 570-576 (310-326 in the english translation),

[RZ] Ribes, Zalesskiì: On the profinite topology on a free group. Bull. London Math. Soc. 25 (1993), 37-43,

[Tr] J.K. Truss: Generic Automorphisms of Homogeneous Structures, Proc. London Math. Soc. 65(3)(1992), 121-141.