Brückenkurs Lin A

Worum geht es in der Lin A?

Lösen von linearen Gleichungen!

$$2x + 4y = 1$$
$$x + y = 0$$

allgemein
$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{array} \quad (*)$$

Wir wollen wissen: - Gibt es Lösungen?

- Wenn ja, welche Struktur hat die Lösungsmenge
  $\rightsquigarrow$ VR / affiner Raum
- Wie "groß" ist ein VR? $\rightsquigarrow$ Dimension.
- Abbildungen zwischen VR.

Technisches Hilfsmittel: Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

$$(*) \Leftrightarrow A x = b \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Wofür Lin A in der Analysis?

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞-Fktnen $\Rightarrow$ Ableitung $f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$

Kettenregel: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f = (f_1, \dots, f_n): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ C^∞-Fktn in m Variablen $x_1, \dots, x_m$

②

$\Rightarrow$ Ableitung $Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ Jacobi-Matrix

Kettenregel $\quad J(f\circ g)(x) = Jf(g(x)) \cdot Jg(x)$

Matrixprodukt

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞. Extrema?

Notw. Bed: $f'(x_0) = 0$

Notw. und hinreichende Bed. $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$ oder $f''(x_0) < 0$

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ C^∞ Extrema?

Notw. Bed. $Jf(x_0) = 0$

Notw. und hinr. Bed: $Jf(x_0) = 0$ $\operatorname{Hess} f(x_0)$ pos. od. neg. definit

$$\operatorname{Hess} f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_m} \end{pmatrix}(x_0)$$

3) Gewöhnliche DGLen

Wir wollen die DGL $y' = y$ lösen, d.h. wir suchen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ so dass $f'(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Die Lösungsmenge ist ein (abstrakter) VR der Dimension 1.

Was ist ein Vektorraum?

Defn: Sei K ein Körper (typischerweise $K = \mathbb{R}$)

Ein K-Vektorraum ist eine nicht-leere Menge V mit Abb.

$+ : V \times V \to V$ Vektoraddition

$\cdot : K \times V \to V$ skalare Multiplikation

so dass gilt

1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

2) $\forall\, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt

a) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

b) $\lambda (v + w) = \lambda v + \lambda w$

Distributivgesetze

c) $(\lambda \mu) v = \lambda (\mu v)$ Assoziativgesetz

d) $1 \cdot v = v$

- Wichtigstes Beispiel $V = \mathbb{R}^n$ = Menge der n-Tupel $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda x := \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

- Ebenfalls wichtig: $C^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \ \ C^\infty \}$

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$

z.B. $]a, b[\subset \mathbb{R}$

$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

Wie groß ist ein VR?

Ein VR hat (meistens) ∞-viele Elemente. Brauchen intelligenteres Maß für Größe.

Defn: Sei V ein $\mathbb{R}$-VR und $v_1, \dots, v_n \in V$.

$v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig falls gilt:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so dass $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Bsp: - $V = \mathbb{R}^2$ a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sei $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ so dass

$$\underbrace{\lambda_1 v_1}_{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow v_1 \text{ lin. unabh.}$$

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 3$ $\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 v_1}_{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1$ nicht. lin. unabh.

c) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}_{\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$\Rightarrow$ lin. unabh.

Aufgabe in $\mathbb{R}^3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ lin. abhängig

$$2 v_1 + (-1) v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Defn: Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Dann heißt

$$\dim V = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, v_1, \dots, v_n \in V \text{ lin. unabh.}\}$$

die Dimension von V. Falls $\dim V < \infty$ heißt V endlich-dim.

Bsp: $\mathbb{R}^n$ hat Dimension n.

Beweis: Die Menge $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist lin. unabh. (triv)

$\Downarrow$

$\dim \mathbb{R}^n \geq n.$

Außerdem.

Sei $\underset{(x_1, \dots, x_n)}{\overset{}{v}} \in \mathbb{R}^n$ dann ist $v = \sum x_i e_i$.

Seien nun $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ mit $m > n$.

Dann hat das Gl. system:

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_{1,1} + \dots + \lambda_m v_{1,m} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_1 v_{n,1} + \dots + \lambda_m v_{n,m} &= 0 \end{aligned}$$

eine nicht-triv. Lösung (Beweis: siehe Gaußalg.)

$\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ lin. abhängig $\Rightarrow \dim \mathbb{R}^n \leq n$. $\boxed{\text{q}}$

Satz und Defn:

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR der Dimension n und $\{v_1, \dots, v_n\} \in V$ lin unabh.

Dann ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine <u>Basis</u> von V d.h.

$\forall v \in V \; \exists! \; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so dass

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

"Jedes v ist Linearkombination der Basis".

Wissen:

Bsp: $V = \mathbb{R}^2$ a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist. lin. unabh.

sei $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Finde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2$$

$$3 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 2 \quad \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \lambda_1 = 1.$$

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist lin. abh. $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Das System $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ hat keine Lösung

$$4 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 \quad \overset{\text{II}-\text{I}}{\Rightarrow} \quad -1 = 0 \quad \lightning$$

$$3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2$$

Defn: Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Eine Teilmenge $T \subset V$ heißt Untervektorraum falls T selbst ein VR ist.

Praktisches Kennzeichen: T ist UVR wenn

i) $0 \in T$

ii) $\forall\, v, w \in T$ gilt $v + w \in T$

iii) $\forall\, v \in T, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda v \in T$.

Aufgabe dim $T = 1$

Bsp: a) $\{0\} \subset V$

b) Sei $v_0 \in V$. $T := \{ v \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \ v = \lambda v_0 \} \overset{\text{Notation}}{=:} \mathbb{R} v_0$

c) $V = \mathbb{R}^2$ $\quad T = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid x_1 + x_2 = 0 \}$

Aufgabe $T = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Matrizen

Defn Seien $n, m \in \mathbb{N}^{>0}$. Eine $n \times m$-Matrix A ist eine Tabelle mit n Zeilen und m Spalten in denen ~~G~~ reelle Zahlen stehen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Die Menge aller $n \times m$ Matrizen bezeichnet man mit $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$.

Kurzschreibweise:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

Bsp:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix $\in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$
- $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ die Nullmatrix.

Defn: Seien $A = (a_{ij})_{i,j}$, $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$
$\lambda \in \mathbb{R}$.

~~Wir~~ definieren die Summe

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

die skalare Multiplikation

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

Bem: $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{R}$-VR der Dimension $n \cdot m$.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 1/2$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 1 & 1/2 \cdot 2 \\ 1/2 \cdot 3 & 1/2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wichtig!

Defn: Seien $\underset{\substack{\parallel \\ (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}}}{A} \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$, $\underset{\substack{\parallel \\ (b_{jk})_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le l}}}}{B} \in \mathrm{Mat}(m \times l, \mathbb{R})$.

Dann ist

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(n \times l, \mathbb{R})}}{A \cdot B} := \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le l}}$$

Bsp: a) $\underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})}}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(2 \times 1, \mathbb{R})}}{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(2 \times 1, \mathbb{R})}}{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$

$B \cdot A$ nicht definiert!

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \\ 6 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 6 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 38 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}$$

9

c) $\underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(1\times n, \mathbb{R})}}{a} = (a_1 \; \dots \; a_m)$ $\quad \underset{\substack{\cap \\ \mathrm{Mat}(n\times 1)}}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow a \cdot v = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$\Rightarrow$ Ein Gl. system
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_m \end{matrix}$$

schreibt man kompakt $A \cdot x = b$

$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$, $x = (x_j)_{1\le j\le m}$, $b = (b_i)_{1\le i\le n.}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 0 + 6\cdot 1 & 4\cdot 0 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Berechnen Sie $B \cdot A$.

<u>Defn:</u> Sei $n \in \mathbb{N}^{>0}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$.

Die Matrix heißt invertierbar falls

$\exists B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ so dass $A \cdot B = I_n$.

Bem: In diesem Fall ist B eindeutig bestimmt.

Bsp: a) $n=1$ $\quad A = (\underset{\underset{\mathbb{R}}{\uparrow}}{a_{11}})$ invertierbar falls $\exists B = (b_{11})$

so dass $\underset{(a_{11} b_{11})}{\underset{\shortparallel}{A \cdot B}} = I_1 = (1)$ $\quad \Rightarrow A$ invertierbar $\Leftrightarrow a_{11} \neq 0$.

b) $n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ invertierbar

sei $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Löse das Gleichungssystem

$$AB = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 2b_{21} & 2b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow b_{21} = 0, \; b_{22} = 1/2$. $\quad \Rightarrow b_{12} = -1, \; b_{11} = +1$

$B = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ist ein Inverses.

Aufgabe: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar