Def

Es sei $m, n > 0$, $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$.

Dann ist

$$\mathrm{rk}\, A = \dim \langle \text{Spalten von } A \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \#\ \text{linear unabhängiger Spaltenvektoren von } A$$

Prop:

~~a)~~ $\mathrm{rk}\, A = \#$ linear unabhängiger Zeilenvektoren von A

~~b)~~

Def:

Es sei $m, n > 0$, $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$

Dann definiert A eine Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Prop: f ist <u>linear</u>, d.h.

1) $\forall v, w \in \mathbb{R}^m : f(v + w) = f(v) + f(w)$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n : f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Def:

Es sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann definieren wir

$$\mathrm{Ker}(f) := \{ v \in \mathbb{R}^m \mid f(v) = 0 \}$$

Bm: für f_A ...

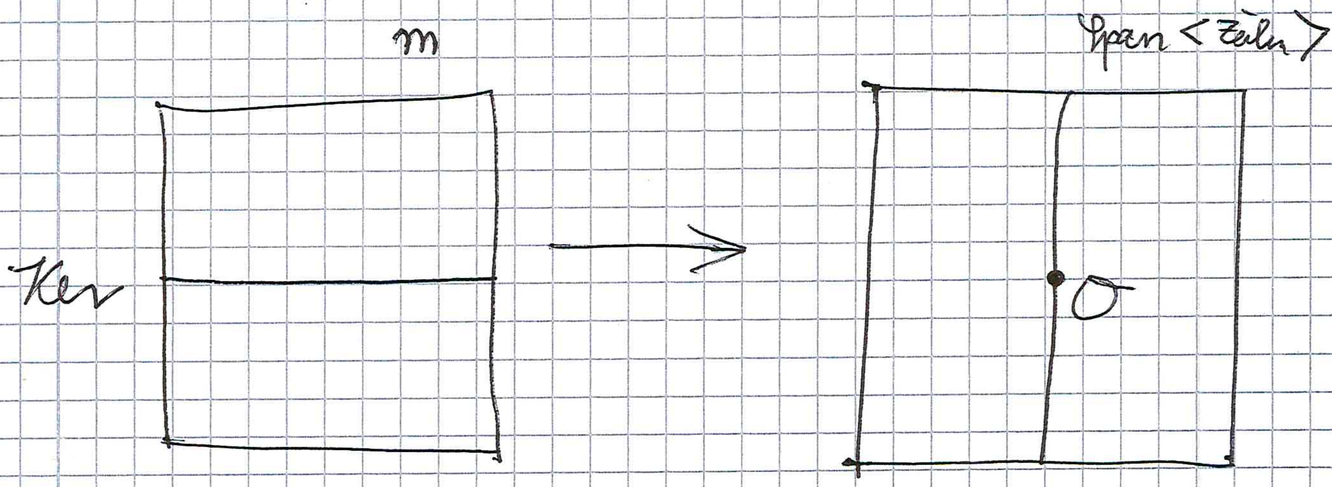
Prop: $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear. Dann gilt:

$\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Untervektorraum.

Prop:

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\boxed{\mathrm{rk}\, A = m - \dim \mathrm{Ker}(f_A)}$$



Wie berechnet man den Rank?

Gauß-Algorithmus

3 Typen v. Operationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $T_{1,3}$ = vertausche 1. und 3. Zeile

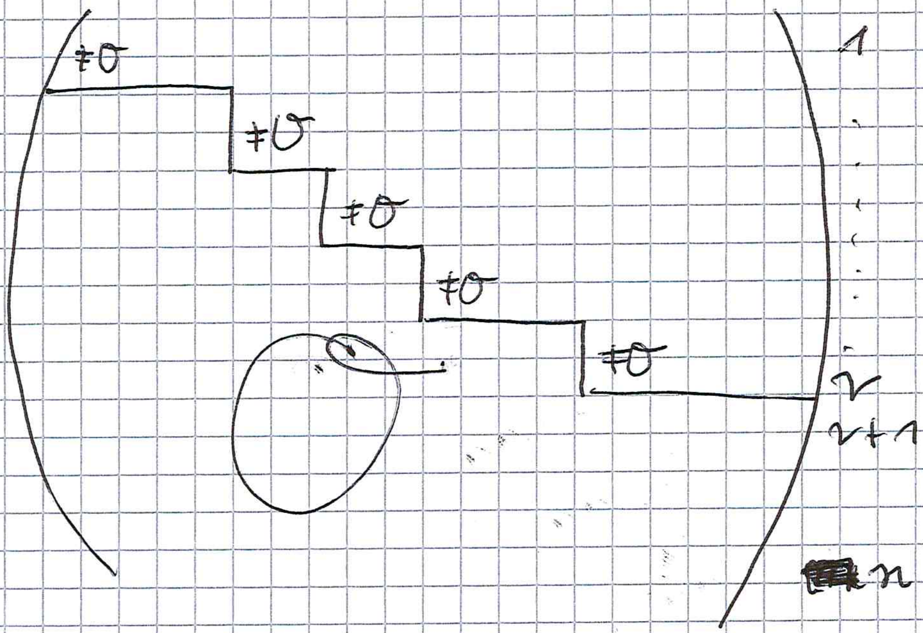
2) $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $R_{1,2}(2)$ = Addiere zu 1. Zeile $2 \cdot$ 2. Zeile

3) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = S_1(3) =$ 1. Zeile mit 3 multipliziert

"elementare Zeilentransformationen"

__Prop:__

Durch wiederholte Anwendung von elementaren Zeilentransformationen kann jede Matrix A in __Zeilenstufenform__ gebracht werden:



~~Indem~~ Es gilt:

$$\boxed{\operatorname{rk} A = r}$$

__Bsp:__

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_{1,3}(-7)]{R_{1,2}(-4),} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 2$$

$$\xrightarrow[S_3(-\frac{1}{\cdot})]{S_2(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2,3}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukte

Motivation: wollen Längen, Winkel und "orthogonal" diskutieren

Def: Sei V ein reeller Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform ist eine Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

mit den folgenden Eigenschaften:

i) Bilinearität: $\forall x \in V$:

die Abbildungen

$$\langle \cdot, x \rangle : V \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \langle v, x \rangle$$

und

$$\langle x, \cdot \rangle : V \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \langle x, v \rangle$$

sind linear.

ii) Symmetrie: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in V$.

Eine symmetrische Bilinearform heißt Skalarprodukt, falls zusätzlich gilt:

iii) Positivdefinitheit:

$$\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Def: Unter einem euklidischen Vektorraum versteht man ein Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, aus einem VR und einem Skalar-

Beispiel

a) Das durch

$$\langle \cdot , \cdot \rangle_{st} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

definierte Skalarprodukt heißt das **Standardskalarprodukt** auf dem $\mathbb{R}^n$.

b) Sei A eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix. Dann ist

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle Ax, Ay \rangle_{std}.$$

ein Skalarprodukt.

Einschub: Orthogonalität

Symmetrische Matrizen

Def.: Es sei $A = (a_{ij}) \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$. Dann nennen wir A **symmetrisch**, falls

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \forall\, 1 \leq i,j \leq n$$

gilt.

Beispiel:

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist $\forall v \in \mathbb{R}^2$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_v & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_v \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right|_v & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right|_v \end{pmatrix}$$

symmetrisch.

Es sei

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform. Dann ist die Matrix

$$(\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$$

symmetrisch.

Umgekehrt, falls $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch ist, so definiert

$$\langle \cdot , \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^t A y$$

eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$.

<u>Klassifikation symm. Bilinearformen</u>

<u>Def.:</u> Ist V ein reeller VR und $b: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, so heißt

$$q: V \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto b(v, v)$$

die zu b gehörige <u>quadratische Form</u> auf V.

<u>Beachte:</u>

$$b(v, w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$$

rekonstruiert b aus q

Bsp.:

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, dann ist die zu $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ gehörige quadratische Form geg. durch

$$q_A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

(Analysis II: Taylor-Entwicklung von $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ am krit. Punkt x_0

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_0} = 0 \quad \forall i \right)$$

$$f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, \xi_i \xi_j$$

+ höhere Ordnung Terme)

Satz: Sei q_A eine quadr. Form auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ des $\mathbb{R}^n$, so dass mit $P = (v_1 \dots v_n)$ gilt

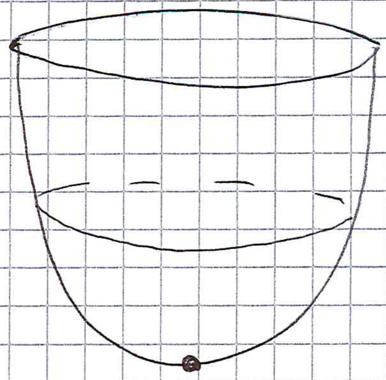
$$P^t A P = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & +1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} s \\ \vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}} \end{array} \end{array}$$

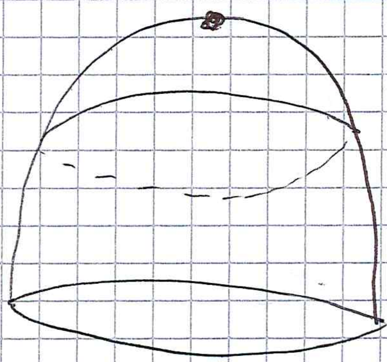
Zusätzlich gilt: für jede solche "Sylvester-Basis" erhält man dieselbe Anzahl r und s von positiven und negativen Einträgen in der oben angegebenen Normalform.

Analysis II :

x_0 krit. Punkt

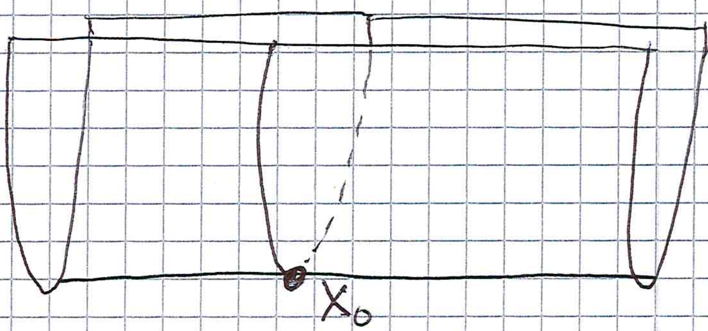
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



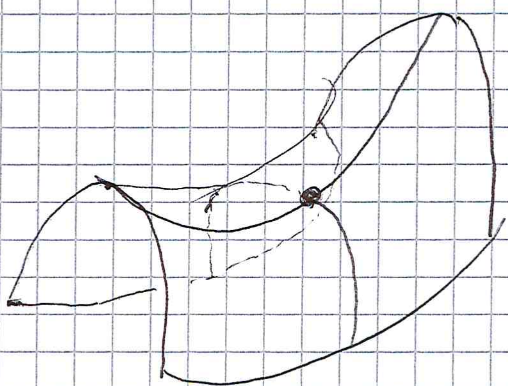


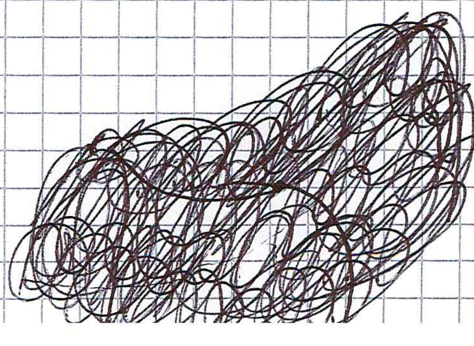
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$





Einschub: Orthogonalität

Def.: Zwei Elemente v, w eines euklidischen Vektorraumes heissen <u>orthogonal</u> oder <u>senkrecht</u> zueinander, falls $\langle v, w \rangle = 0$

Def.: Für von Null verschiedene Elemente x, y eines euklidischen Vektorraumes definiert man den <u>Öffnungswinkel</u> $\alpha(x,y)$ zwischen x und y durch

$$\cos(\alpha(x,y)) = \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}}$$

$$0 \le \alpha(x,y) \le \pi$$

(man zeigt:

$$-1 \le \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{}\sqrt{}} \le 1$$

(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
und da $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv ist, ist das obige wohldefiniert)

Bem.:
Def. von $\alpha(x,y) \Rightarrow \Big[\, x$ senkrecht auf y

$$\Updownarrow$$

$$\alpha(x,y) = 90^\circ \,\Big]$$

↘ übliche Geometrie