Teil II: LINEARE ALGEBRA

Literatur: Skripte Wolke „Mathe I & II"
home.mathematik.uni-freiburg.de/wolke
evtl Diening, Hug, Siebert „DAS"

Bücher für Info

- Merziger, Wirth „Repetitorium zur höheren Mathematik"
- Pareigis „Lineare Algebra für Informatiker"
- Teschl & Teschl „Mathematik für Informatiker" Bd 1

für Mathematiker (einfach)

- Gerd Fischer „Lineare Algebra für Studienanfänger"
- Beutelspacher „Lineare Algebra"

§ Vektorräume

Def: Man braucht einen „Grundkörper" $(K, +, \cdot)$, z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ und definiert „K-Vektorräume" bzw. „Vektorräume über K".

V ist ein K-Vektorraum, falls eine zweistellige („innere") Operation $+$ auf V gibt und eine „äußere" Operation $\cdot : K \times V \to V$, $(\underset{K}{\underset{\cap}{k}}, \underset{V}{\underset{\cap}{v}}) \mapsto k \cdot v = kv$ mit folgenden Eigenschaften:

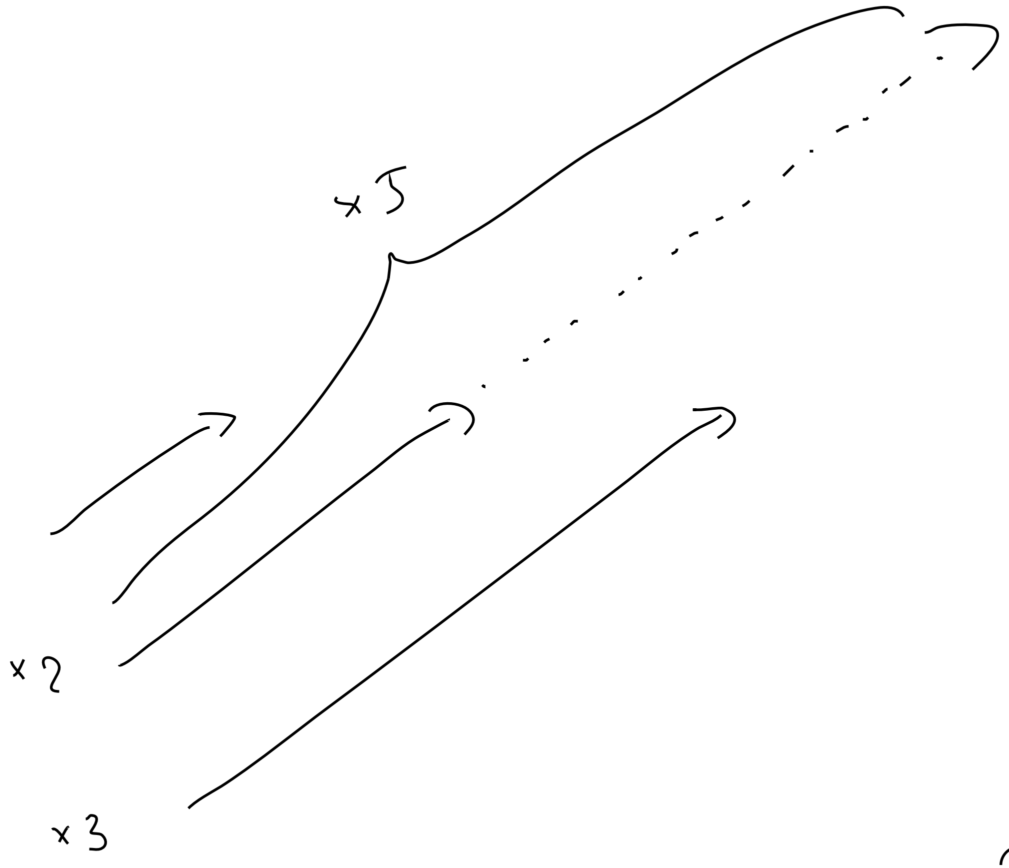
(„Skalarmultiplikation")

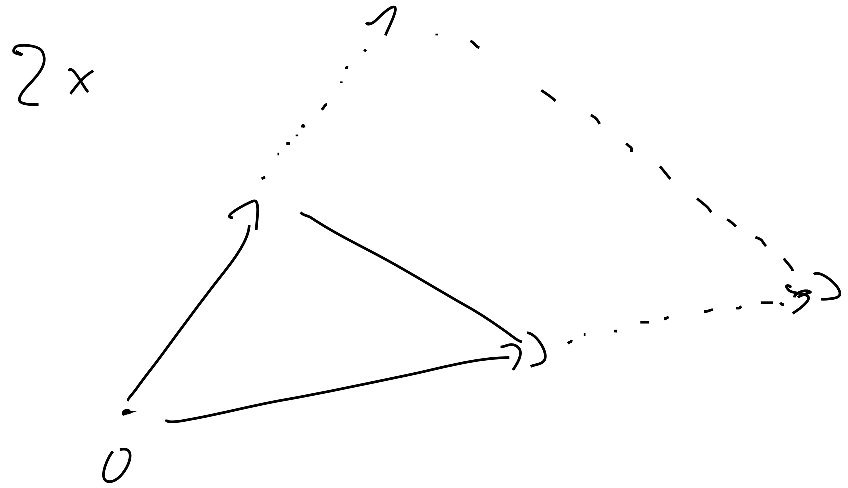
- $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe (mit neutralem Element 0 und neg. Inversen $-v$ zu v)
- $k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2$
- $(k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$
- $(k_1 \cdot k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 \cdot v)$
- $1_K \cdot v = v$

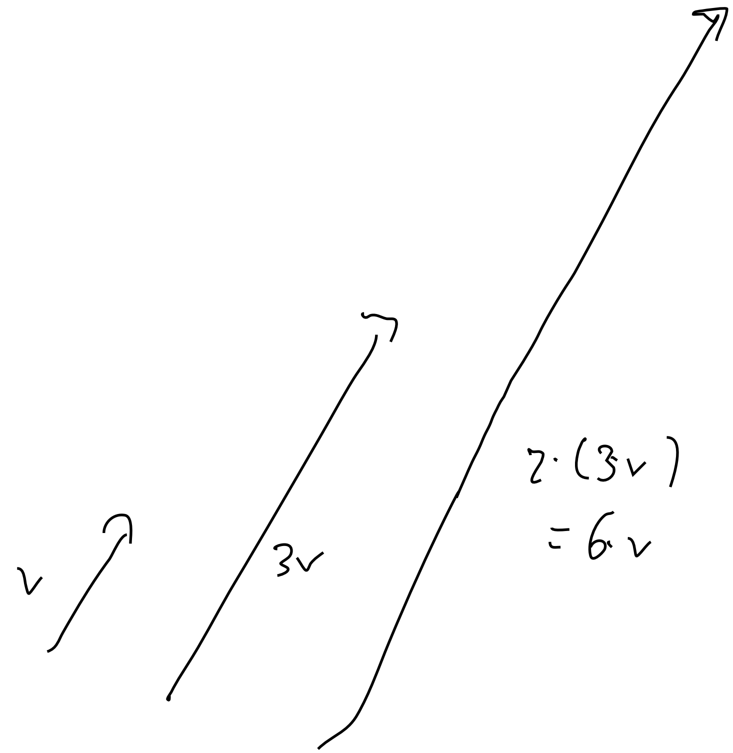
$\Big\}$ für alle $k, k_1, k_2 \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$

„Punkt vor Strich"

Veranschaulichungen
des Vektorraumaxioms:







Bem: Aus den Axiomen folgen andere Rechenregeln.

z.B. (1) $0_K \cdot v = 0_V$

Vorsicht: es gibt zwei „Nullen"

0_K, d.h. das neutrale Element der Addition im Körper K

0_V, ——— " ——— —"— im Vektorraum V

(2) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis: (1) $0_K \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 v$

also $0_V = 0 \cdot v + \underbrace{-(0 \cdot v)}_{\text{Inverse von } 0v \text{ in } V} = 0 \cdot v + 0v + -(0v) = 0 \cdot v$

(2) $0_V = 0_K \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = v + (-1) \cdot v$

also (wegen Eindeutigkeit von Inversen in Gruppen) ist $-v = (-1) \cdot v$

q.e.d.

Beispiele:

(1) Ebene, darin die „Pfeile"

und zwar entweder „bis auf Translation" d.h. Parallelverschiebung

(d.h. 2 durch Verschieben (ohne Drehung!) zur Deckung zu bringende Pfeile gelten als gleich)

oder Pfeile, die von einem festen Punkt „0" ausgehen („Ursprung")

(Variante 1 heißt Äquivalenzklassen von Pfeilen zu betrachten, Variante 2 ein Repräsentantensystem)

Diese Pfeile bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$:

Vektoraddition ist „Hintereinandersetzen"

Skalarmultiplikation ist das „Strecken um den betreffenden Faktor"

Abgabe Übungsblatt 6 am 20.6.2011 !!

Bsp (2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(r,s) \mid r,s \in \mathbb{R}\}$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit:

Addition = koordinatenweise Addition

Skalarmultiplikation $\underset{\in \mathbb{R}}{k} \cdot (r,s) := (k \cdot r, k \cdot s)$

Übung: Überprüfen der Vektorraumaxiome,

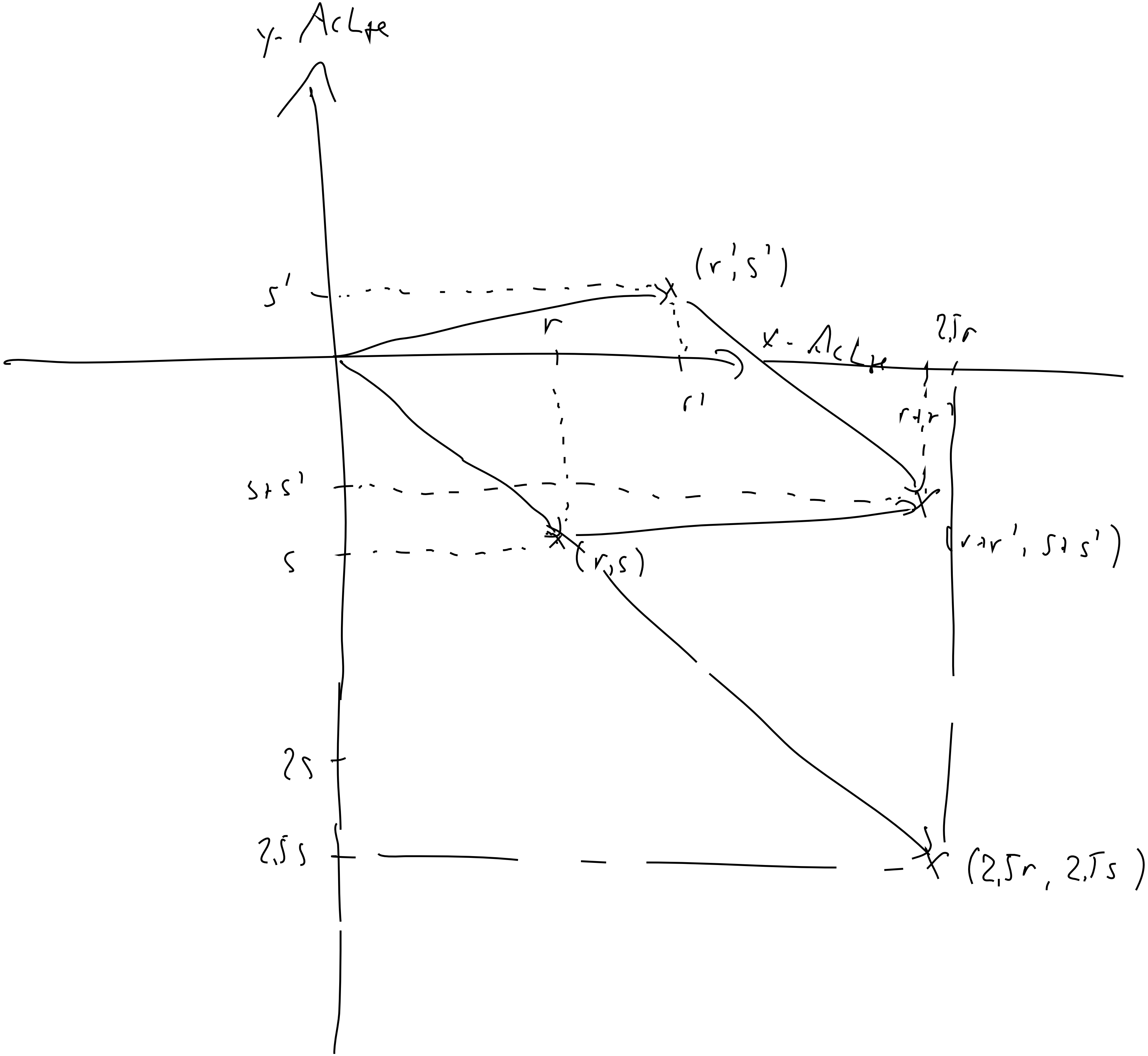
zB $(k_1+k_2)\cdot(r,s) = ((k_1+k_2)\cdot r, (k_1+k_2)\cdot s)$

$= (k_1 \cdot r + k_2 \cdot r, k_1 s + k_2 \cdot s)$

$= (k_1 r, k_1 s) + (k_2 \cdot r, k_2 s)$

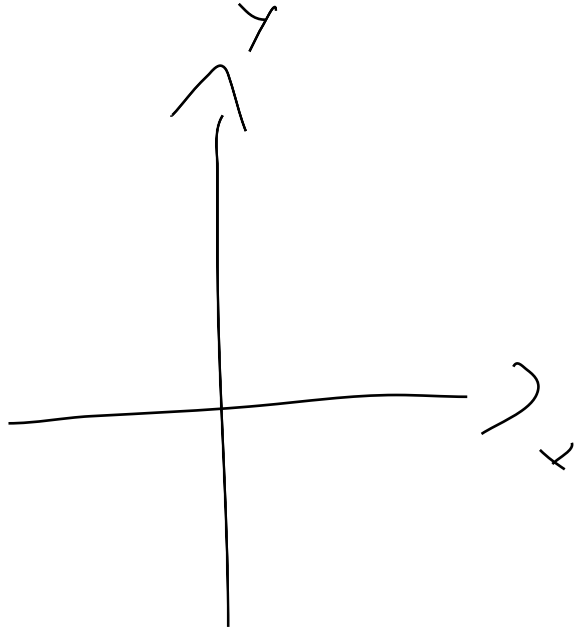
$= k_1 \cdot (r,s) + k_2 \cdot (r,s)$

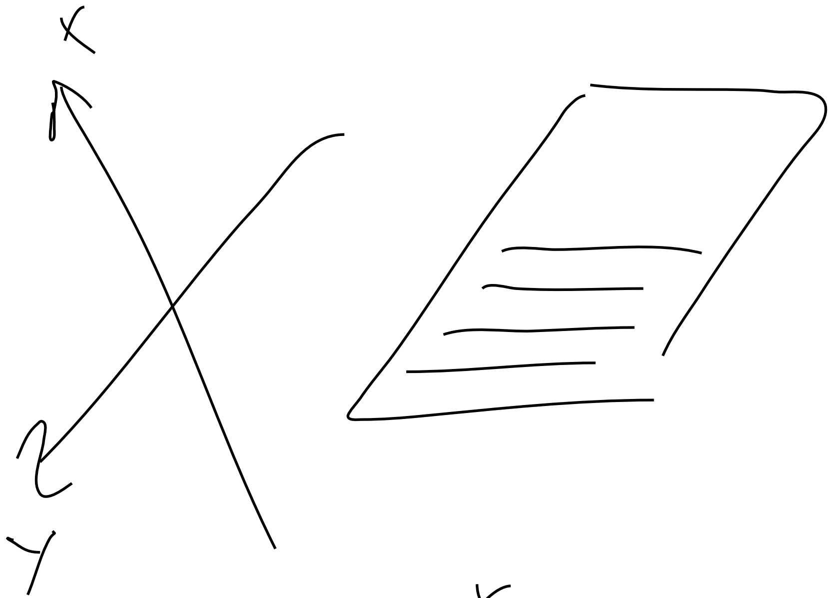
$\boxed{\text{Ẑ}}$



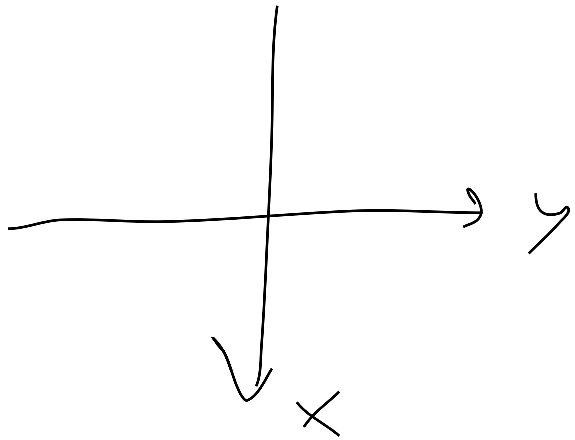
y-Achse
x-Achse
(r', s')
(r, s)
(r+r', s+s')
(2,5r, 2,5s)
s'
s+s'
s
2s
2,5s
r
r'
r+r'
2,5r

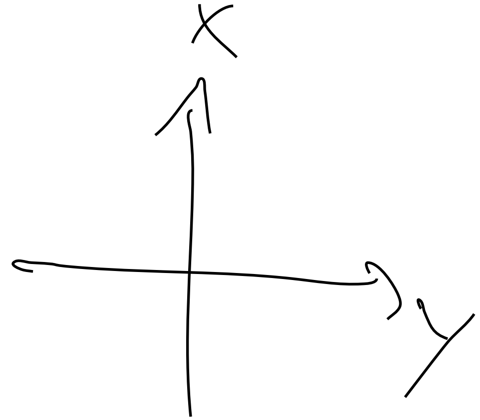
Verschiedene Möglichkeiten, von Bsp 1 zu Bsp 2 zu gelangen:





x: 1. Koordinate
y: 2. Koordinate





(3) a) Pfeile im 3-dimensionalen Raum

b) $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(r,s,t) \mid r,s,t \in \mathbb{R}^3\}$

(4) a) Pfeile im n-dimensionalen Raum

b) $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}} = \{\underbrace{(r_1, \ldots, r_n)}_{n\text{-Tupel}} \mid r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}\}$

koordinatenweise Addition

$(r_1, \ldots, r_n) + (s_1, \ldots, s_n) = (r_1 + s_1, \ldots, r_n + s_n)$

koordinatenweise Skalarmultiplikation

$k \cdot (r_1, \ldots, r_n) = (k \cdot r_1, \ldots, k \cdot r_n)$

alles $\mathbb{R}$-Vektorräume

(5) Körper K: $K^n = \{(k_1, \ldots, k_n) \mid k_i \in K\}$ K-Vektorraum

insb. $\mathbb{F}_2 = K$: Menge der $\{0,1\}$-Folgen der Länge n ist ein $\mathbb{F}_2$-VR

(Hinweis: -1 in $\mathbb{F}_2$? -1 ist die Lösung der Gleichung
$1 + x = 0$

In $\mathbb{F}_2$ ist $x = -1$, da $1 + 1 = 0$, d.h. $1 = -1$)

(6) Folgen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ (bzw aus Körper K) bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ (bzw K)

$$(r_1, r_2, r_3, \ldots) + (s_1, s_2, s_3, \ldots)$$
$$= (r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3, \ldots)$$
$$k \cdot (r_1, r_2, r_3, \ldots) = (kr_1, kr_2, kr_3, \ldots)$$

(7) <u>Insbesondere</u>: a) $K^1 = K$ ist selbst ein K-Vektorraum mit „normaler" Addition und Multiplikation

b) $K^0 = \{0\}$ ist K-VR : triviale Gruppe mit $0 + 0 = 0$ und Skalarm. $k \cdot 0 = 0$

(8) $K \subseteq R$ K ist Unterring von dem Ring R
Körper K dann ist R K-Vektorraum mit Addition und Multiplikation von R

<u>Spezialfälle</u>:
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ ist „2-dimensionaler" $\mathbb{R}$-Vektorraum
- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}[X]$: $\mathbb{R}[X]$ bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum

allgemeiner $K[X]$ bilden K-Vektorraum