neues Übungsblatt ist im Netz!

ERINNERUNG:

- K-Vektorraum $\quad$ K Körper, z.B $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_2$

  Addition $+ : V \times V \to V$ $\quad$ (Gruppe, kommutativ)

  Skalarmultiplikation $K \times V \to V$

  $+$ Axiome

- K-Unter|vektor|raum

- von $v_1, \dots, v_m \in V$ erzeugte Untervektorraum ist die Menge der Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{m} k_i v_i$ $\quad (k_i \in K)$

Achtung: unendlich viele Vektoren

$$\langle \{ v_i \mid i \in I \} \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} k_j v_{i_j} \;\middle|\; k_j \in K,\ \ell \in \mathbb{N},\ i_j \in I \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i \in I} k_i v_i \;\middle|\; k_i \in K, \text{ nur endlich viele der } k_i \text{ sind } \neq 0 \right\}$$

- $\{v_i \mid i \in I\}$ linear unabhängig, falls kein v_{i_0} im Erzeugnis des anderen, d.h. $\{v_i \mid i \in I\} \setminus \{v_{i_0}\}$, liegt

- Basis = linear unabhängiges Erzeugendensystem

Bemerkung $K^n = \underbrace{K \times \dots \times K}_{n\text{-mal}} = \{\underbrace{(k_1, \dots, k_n)}_{n\text{-Tupel}} \mid k_i \in K\}$

auch „Zeilenvektoren" genannt

Man kann diese Vektoren auch als „Spaltenvektoren" schreiben

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \text{ mit } \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1' \\ k_2' \\ \vdots \\ k_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_1' \\ k_2 + k_2' \\ \vdots \\ k_n + k_n' \end{pmatrix}, \quad k \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kk_1 \\ kk_2 \\ \vdots \\ kk_n \end{pmatrix}$$

V ist K-Vektorraum

bzgl. Inklusion

Satz: $\{v_i \mid i \in I\}$ Basis

$\iff \{v_i \mid i \in I\}$ ist maximale linear unabhängige Teilmenge von V

$\iff \{v_i \mid i \in I\}$ ist minimales Erzeugendensystem von V

Beweis: (1) Sei $\{v_i \mid i \in I\}$ Basis

a) $v \in V$, dann ist $v \in \langle \{v_i \mid i \in I\} \rangle$

1. Fall $\{v_i \mid i \in I\} \cup \{v\}$ ist nicht mehr linear unabhängig
2. Fall $v = v_i$, d.h. " $\{v_i \mid i \in I\}$

also ist Basis maximal lin. unabh.

b) ang. kein minimales Erzeugendensystem, dann existiert $i_0 \in I$ so, dass $\{v_i \mid i \in I\} \setminus \{v_{i_0}\}$ Erzeugendensystem. Dann ist aber v_{i_0} im Erzeugnis der anderen Vektoren der Basis: $\lightning$ zur lin. Unabh.

(2) $\{v_i \mid i \in I\}$ maxi lin. unab., ang: $v \notin \langle \{v_i \mid i \in I\} \rangle$

Beh: Dann ist $\{v_i \mid i \in I\} \cup \{v\}$ lin. unabh.

Denn falls $v_{i_0} = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} k_i v_i + kv$, dann $k \neq 0$, da $\{v_i \mid i \in I\}$ lin. unabh.

Dann $v = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} -\frac{k_i}{k} \cdot v_i + \frac{1}{k} v_{i_0} \in \langle \{v_i \mid i \in I\} \rangle$ $\lightning$

(3) $\{v_i \mid i \in I\}$ min. Erz ??: lin. unabh.

Falls nicht, dann $v_{i_0} \in \langle \underbrace{\{v_i \mid i \in I\} \setminus \{v_{i_0}\}}_{\text{ist bereits Erzeugendensystem}} \rangle$ $\Rightarrow$ $\square$

<u>Satz</u>: (ohne Beweis)

Jeder Vektorraum besitzt Basen (klar für endlich erzeugte VR!)

Alle Basen eines Vektorraums haben die gleiche Mächtigkeit (d.i. Anzahl der Elemente im endlichen Fall). Diese Mächtigkeit / Anzahl heißt <u>Dimension</u> des Vektorraums (über dem Körper)

V K-Vektorraum: $\dim_K V$ (bzw. kurz $\dim V$ falls klar ist, um welchen Körper es sich handelt)

<u>Bsp</u>: a) K^n ist n-dimensional, d.h. $\dim_K(K^n) = n$

mit <u>Standardbasis</u> $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

$$(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot e_i$$

insbesondere: $K^1 = K$ ist 1-dimensionaler K-VR $\quad \dim_K K = 1$

$K^0 = \{\underset{\overset{\shortparallel}{0_V}}{\emptyset}\}$ ist 0-dimensionaler K-VR $\quad \dim_K (K^0) = 0$

(per Konvention ist die leere Menge das einzige 0-Tupel)

(b) $\dim_K K[X] = \infty$

„Standardbasis" $\{1, X, X^2, X^3, \dots\}$

(c) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Satz: V K-VR, $\{v_i \mid i \in I\}$ Basis, $v \in V$

ohne Doppelnennungen, d.h. $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, $i,j \in I$

Dann existiert eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{i \in I} k_i \cdot v_i$ (nur endl. viele $k_i \neq 0$)

Beweis: Da Basis Erzeugendensystem, existiert stets eine solche Darstellung.

Eindeutigkeit: Angenommen $v = \sum_{i \in I} k_i v_i = \sum_{i \in I} k_i' v_i$ mit $k_{i_0} \neq k_{i_0}'$

Dann $0 = \sum_{i \in I} (k_i - k_i') v_i$ und $v_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left(- \frac{k_i - k_i'}{k_{i_0} - k_{i_0}'} \cdot v_i \right)$

Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit! $\square$

Idee: V n-dimensionaler K-VR

$\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis

Abbildung $v \longmapsto (k_1, \dots, k_n)$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$

ist „Isomorphismus“ $V \to K^n$

Bem: Basis ist „geordnet“

Lineare Abbildungen

Def: V, W K-Vektorräume

a) $\varphi: V \to W$ ist eine K-lineare Abbildung bzw.

K-Vektorraum-Homomorphismus

reicht: $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

falls φ ein Gruppenhomomorphismus bzgl. $+$ ist

und $\varphi(k \cdot v) = k \cdot \varphi(v)$ für alle $k \in K$, $v \in V$

b) φ ist K-Vektorraum-Isomorphismus, falls φ bijektive Abbildung ist und φ und φ^{-1} K-linear sind

(ist automatisch der Fall bei bijektiver K-linearer Abbildung)

Satz: V n-dimensionaler K-Vektorraum

Jede geordnete Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V legt durch $\varphi: e_i \mapsto v_i$ einen K-VR-Isomorphismus $\varphi: K^n \to V$ fest.

Umgekehrt: Jeder K-VR-Isomorphismus $\varphi: K^n \to V$ bestimmt eine geordnete Basis $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ von V, die wiederum den Isomorphismus festlegt.

Beweis: a) $\varphi((k_1, \dots, k_n)) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n k_i e_i\right) := \sum_{i=1}^n k_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot v_i$

ist per Definition K-linear

surjektiv: $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n k_i' v_i = \varphi((k_1', \dots, k_n'))$

injektiv: da Gruppenhomomorphismus, reicht es, $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$ zu zeigen

$(k_1'', \dots, k_n'') \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, d.h. $\sum_{i=1}^n k_i'' v_i = 0 = \sum_{i=1}^n 0 \cdot v_i$

da Darstellung bzgl. Basis eindeutig, folgt $k_1'' = 0, \dots, k_n'' = 0$

b) $\varphi: K^n \to V$ Isom: sei $v \in V$, φ ist surjektiv, also existiert $(k_1, \dots, k_n) \in K^n$ mit $\varphi((k_1, \dots, k_n)) = \sum_{i=1}^n k_i \cdot \varphi(e_i) = v$

also $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ Erzeugendensystem

Da φ injektiv, ist $(k_1, \ldots, k_n)$ eindeutig

<u>Bem:</u> Falls $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Erzeugendensystem und zu jedem $v \in V$ gibt es eine <u>eindeutige</u> Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$, dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis

<u>Denn:</u> Falls $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abh., o.E.

$$\left.\begin{aligned} v_n &= \sum_{i=1}^{n-1} k_i' v_i + 0 v_n \\ v_n &= \sum_{i=1}^{n-1} 0 \cdot v_i + 1 \cdot v_n \end{aligned}\right\} \text{ ↯ zur Eindeutigkeit!}$$

$\boxed{\text{?}}$

Wahl einer Basis $\hat{=}$ Wahl eines Isomorphismus auf K^n

<u>Folgerung:</u> V, W n-dimensionale K-Vektorräume $\Rightarrow V \cong W$

(gilt entsprechend für unendlich-dimensionale Vektorräume, falls man die Dimension mit unendlichen Kardinalzahlen misst)