Einschub: $m \times n$ Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Transponierte von A $\quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\quad$ (die an der Diagonale gespiegelte Matrix)

$n \times m$-Matrix

$$A^{TT} = A$$

v Spaltenvektor $\Rightarrow$ v^T gleicher Vektor als Zeilenvektor

$v, w \in K^n$ Spaltenvektoren $\quad v^T \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$ $\quad$ (Standard)skalarprodukt auf K^n

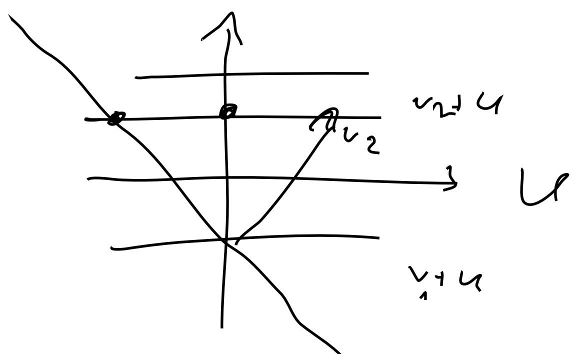
---

Ende

Weiter im Stoff: $\quad U \leq V$, Faktorraum V/U

natürliche Projektion $\pi: V \to V/U$, $v \mapsto v + U$
ist lineare Abbildung

Bsp $V = \mathbb{R}^2$
$U = \langle e_1 \rangle$



es gibt ein „Komplement", d.h. ein Repräsentantensystem, das selbst einen Untervektorraum bildet
z.B. $\langle e_2 \rangle$

Basisergänzungssatz: $v_1, \dots, v_\ell$ linear unabhängige Vektoren in V

Dann lässt sich $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ zu einer Basis ergänzen

(Klar im endlich-dimensionalen Fall: Wähle maximal linear unabhängige Obermenge!)

Satz (Homomorphiesatz) $\varphi: V \to W$ lineare Abbildung

a) $V/\mathrm{Kern}(\varphi) \cong \mathrm{Bild}(\varphi)$

$$V \to V/\mathrm{Kern}(\varphi) \to \mathrm{Bild}(\varphi) \to W$$

$$v \mapsto v + \mathrm{Kern}(\varphi) \mapsto \varphi(v) \to \varphi(v)$$

b) Dimensionsformel:

$$\dim \mathrm{Kern}(\varphi) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim V$$

Beweis: a) wie gehabt

b) Wähle Basis $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ von $\mathrm{Kern}(\varphi)$, ergänze durch $v_{\ell+1}, \dots, v_n$ von V

Fall $\dim V < \infty$ $\overset{..}{n}$

Beh: $\varphi(v_{\ell+1}), \dots, \varphi(v_n)$ ist Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$

Klar: ist Erzeugendensystem, denn $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \varphi(v_i) = \sum_{i=\ell+1}^{n} k_i \varphi(v_i)$$

z.z. $\varphi(v_{\ell+1}), \dots, \varphi(v_n)$ sind linear unabhängig ang. (O.E) $\varphi(v_n) = \sum_{i=l+1}^{n-1} b_i \varphi(v_i)$. Dann $\varphi\Big(\underbrace{v_n - \sum_{i=l+1}^{n-1} b_i v_i}_{\in \operatorname{Ker}(\varphi)}\Big) = 0$

Also $v_n - \sum_{i=l+1}^{n-1} b_i v_i = \sum_{i=1}^{l} b_i v_i$, bzw $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_i v_i$ $\lightning$ $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh. $\boxed{\text{W}}$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

gegeben m linearen Gleichungen mit n Unbekannten

$$(*) \quad \begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

$a_{ij}, b_i \in K$, z.B. $K = \mathbb{R}$

$(*)$ heißt homogen, falls $b_1 = \dots = b_m = 0$

Jedes LGS hat ein „zugehöriges homogenes Gleichungssystem“:

ersetze $b_1, \dots, b_m$ durch $0, \dots, 0$

(*) wird beschrieben durch die lineare Abbildung $A: K^n \to K^m$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(*) hat Lösung $\iff \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild}(A)$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

<u>Fall: homogenes Gleichungssystem:</u>

$$\text{Lösungsmenge} = \operatorname{Kern}(A) \neq \emptyset$$

es gibt immer mindestens eine Lösung, nämlich $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Fall: inhomogenes Gleichungssystem:</u>

Falls $\bar{v}$ eine Lösung ist, also $A \cdot \bar{v} = \bar{b}$ gilt,

dann ist die Nebenklasse $\underbrace{v + \operatorname{Kern}(A)}$ genau die Lösungsmenge

eine Lösung von (*) + Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems

Erinnerung: $\mathrm{Rang}(A) = \dim(\text{Zeilenraum})$ — der von Zeilenvektoren von A aufgespannte Unterraum

(das muss bewiesen werden) $= \dim(\text{Spaltenraum})$

$= \dim \mathrm{Bild}(A) = n - \dim(\mathrm{Kern}\, A)$

(d.h. $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^T)$)

Also: Falls Lösungsmenge von $(*) \neq \emptyset$, dann hat Lösungsraum die ~~Größe~~ Dimension $n - \mathrm{rang}(A)$

Insbesondere:

- Falls die Zeilen von A eine lineare Abhängigkeit aufweisen, so muss $\vec{b}$ die gleiche Abhängigkeit aufweisen, damit $(*)$ lösbar sein kann.
  Solche Abhängigkeiten kommen stets vor, falls $m > n$
- Falls ($m \geq n$ und) $\mathrm{Rang}\, A = n$, dann sind Lösungen stets eindeutig (sofern sie existieren)
- Falls $m < n$, so sind Lösungen nie eindeutig (denn $\mathrm{rang}(A) \leq m$)
- Falls $m \leq n$ und $\mathrm{Rang}\, A = m$, dann existiert stets eine Lösung
- Falls $m = n$ und $\mathrm{Rang} = n$, dann existiert stets Lösung und sie ist eindeutig: A ist Isomorphismus (als Abbildung) bzw invertierbar (als Matrix), Lösung von $(*)$ ist $A^{-1} \cdot \vec{b}$

Determinanten (alles ohne Beweis)

Die Determinante einer Matrix $A \in Mat_{n\times n}(K)$ (stets quadratisch!) misst die Volumenänderung durch die durch A beschriebene Abbildung,

also

$$\frac{\text{Volumen des von } Ae_1, \dots, Ae_n \text{ aufgespannten Parallelotops}}{\text{Volumen des Einheitswürfels } e_1 \times \dots \times e_n} \qquad = 1$$

oder allgemein

$$\frac{Vol(\text{Parallelotop}(Av_1, \dots Av_n))}{Vol(\text{Parallelotop}(v_1, \dots v_n))}$$

$$\boxed{\det(A) \in K}$$

bzw: Die Determinante beschreibt das Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelotops.

Das Volumen ist „orientiert", z.B. $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, aber $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$

$$\begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} e_2 & e_1 \end{array}$$

Schreibweise: $\det(A)$ bzw $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$\det A$

Eigenschaften der Determinante

- $\det(A) = 0 \iff$ Spaltenvektoren von A sind linear abhängig

  $\iff \operatorname{Rang}(A) < n$

  $\iff \dim \operatorname{Kern}(A) > 0$

  $\iff A$ ist nicht invertierbar

Bem: Folgerung aus Dimensionsformel

$\varphi: V \to W$

$\dim V = \dim W = n$

φ surjektiv

$\iff \operatorname{Bild}(\varphi) = W$

$\iff \dim(\operatorname{Bild}(\varphi)) = n$

$\iff \dim(\operatorname{Kern}(\varphi)) = 0$

$\iff \varphi$ injektiv

- „Normierung" $\det(\mathrm{Id}_n) = 1$

- „Orientierung" Vertauschung zweier Spalten ändert das Vorzeichen

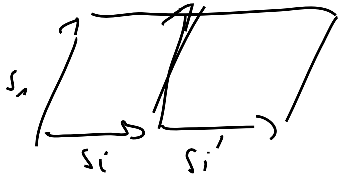
  $\det(A \cdot M(\tau)) = -\det A$ für Transposition τ

  die τ gehörige Permutationsmatrix

allgemein: $\det(A \cdot M(\sigma)) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \det(A)$ für $\sigma \in \operatorname{Sym}(n)$

- „Linearität" det ist als Abbildung der Spaltenvektoren linear, d.h.

$$\det(s_1 | \ldots | s_{i-1} | k \cdot s_i | s_{i+1} | \ldots | s_n) = k \cdot \det(s_1 | \ldots s_i \ldots | s_n)$$



$$\det(s_1 | \ldots | s_{i-1} | s_i + s_i' | s_{i+1} | \ldots | s_n) = \det(s_1 | \ldots s_i \ldots | s_n) + \det(s_1 | \ldots s_i' \ldots | s_n)$$

Bem: Die Determinante ist durch „Linearität", „Normierung" und „Orientierung" eindeutig festgelegt

Weitere Eigenschaften:

- $\det(A) = \det(A^T)$ $\rightsquigarrow$ „Linearität" und „Orientierung" gelten analog für die Zeilenvektoren der Matrix

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

  insbesondere $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ falls A invertierbar