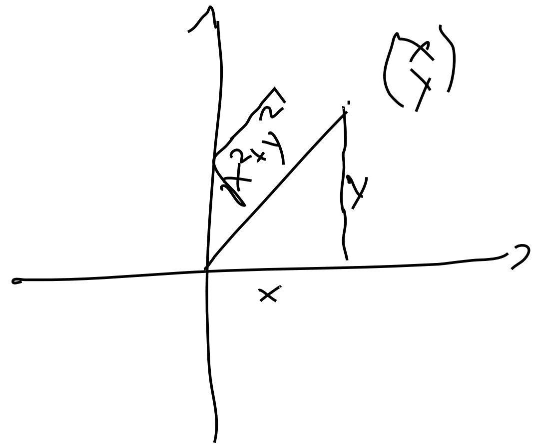
Topologie des $\mathbb{R}^n$

Erinnerung: Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist



$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

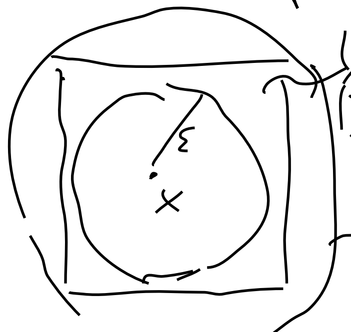
(Im $\mathbb{R}^3$ bilden die Vektoren der Länge r eine Kugel mit Radius r um den Ursprung)

Abstand zweier Vektoren x, y ist

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Abstand berechnet sich aus den Abständen der Koordinaten

x und y sind "nahe beieinander" $\Leftrightarrow$ für alle i x_i und y_i "nahe beieinander"



$|y_1 - x_1| < \varepsilon$
$|y_2 - x_2| < \varepsilon$

$\|x-y\| < 2\varepsilon$

Definition: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls für jedes $x \in U$ ein ε existieren mit $D_\varepsilon(x) \subseteq U$

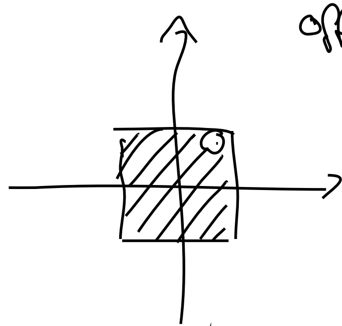
$$D_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| < \varepsilon\}$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist

Beispiel:

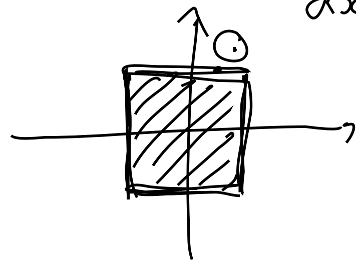
$$\left\{ y \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 < y_1 < 1 \\ -1 < y_2 < 1 \end{array} \right\}$$

offen

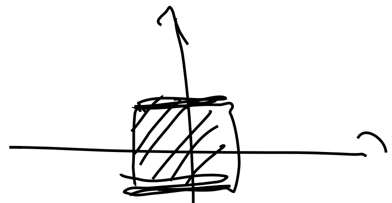


$$\left\{ y \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 \leq y_1 \leq 1 \\ -1 \leq y_2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

abgeschlossen

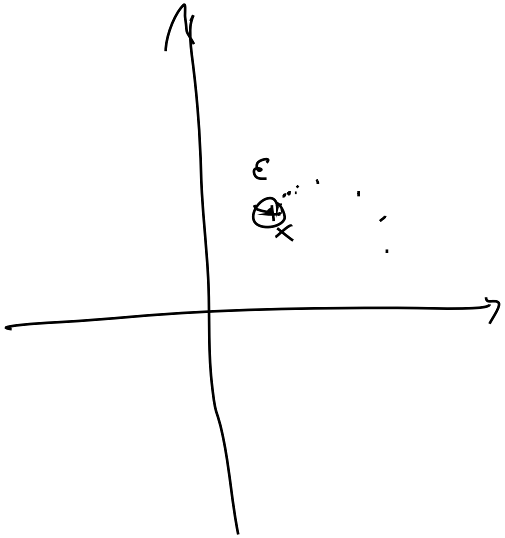


$$\left\{ y \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 < y_1 < 1 \\ -1 \leq y_2 \leq 1 \end{array} \right\}$$



weder noch

Konvergenz: $y_k, x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y_k = \begin{pmatrix} y_{k,1} \\ \vdots \\ y_{k,n} \end{pmatrix}$

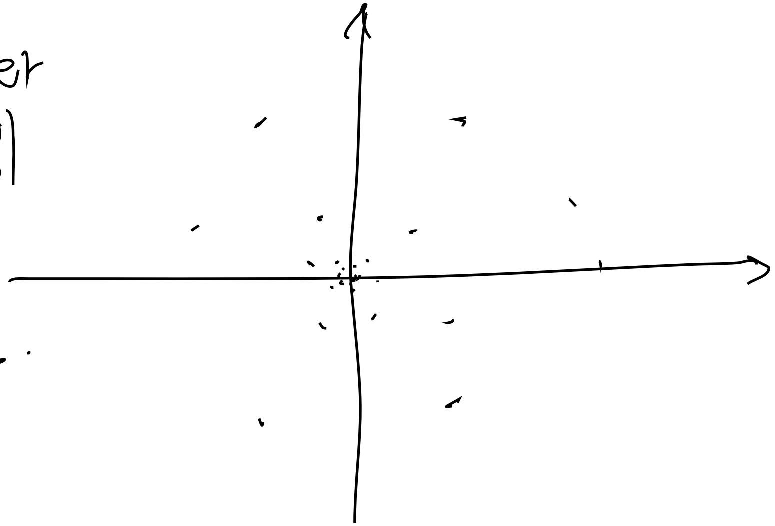


Die Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x

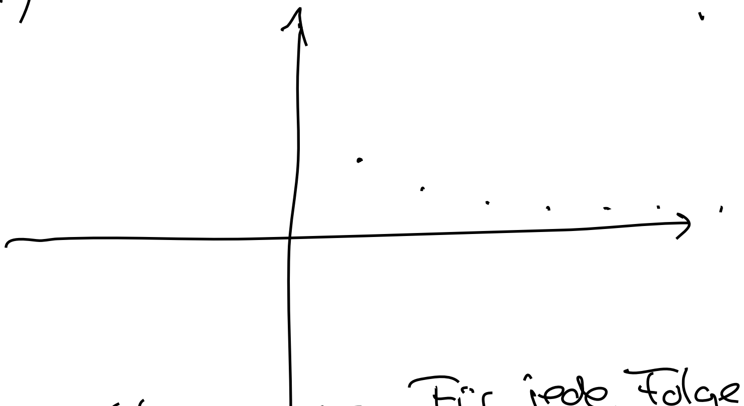
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall k \geq k_\varepsilon \ \|x - y_k\| < \varepsilon$

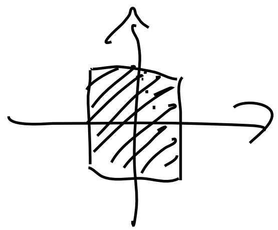
$\Leftrightarrow$ für alle $i = 1, \dots, n$: $y_{k,i}$ konvergiert gegen x_i

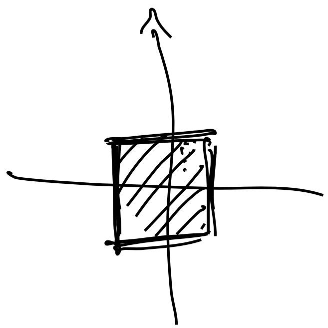
Beispiel: (a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{k} \sin(k) \\ \frac{1}{k} \cos(k) \end{pmatrix}$ konvergiert gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



b) $\begin{pmatrix} k \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}$ konvergiert nicht.







Bemerkung: A abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Für jede Folge in A die konvergiert liegt auch der Grenzwert wieder in A.

Stetigkeit

Definition: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stetig in $x \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow$ für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert gilt $f(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ A

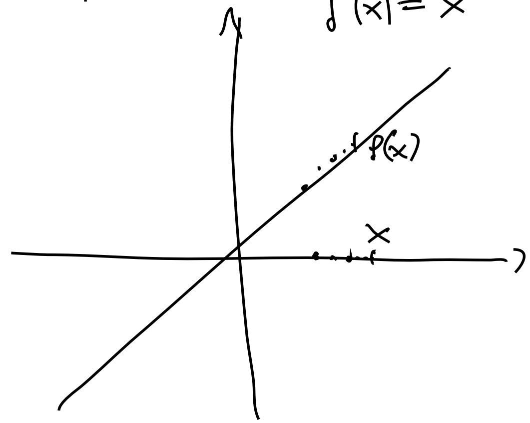
$\Longleftrightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$

$$B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \qquad \text{B}$$

$\Longleftrightarrow$ für jede offene Menge U mit $f(x) \in U$ gilt: es gibt eine offene Menge $U' \subseteq f^{-1}(U)$ mit $x \in U'$

Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

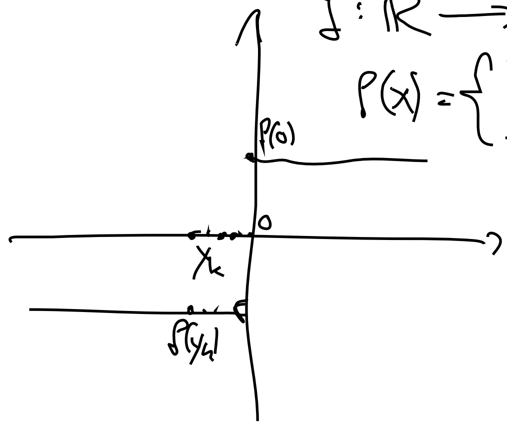
$f(x) = x$

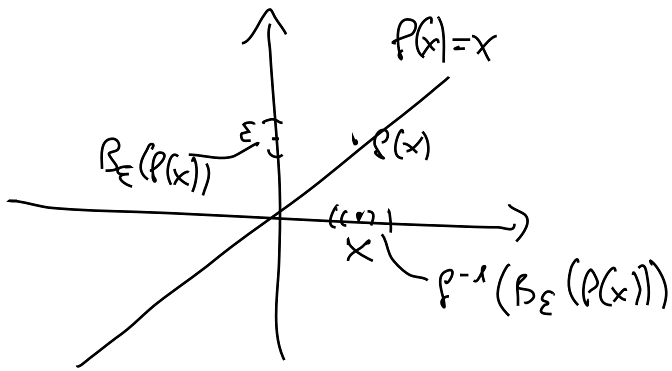


A

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

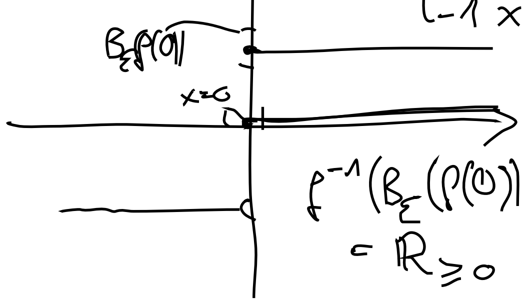
$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$





$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

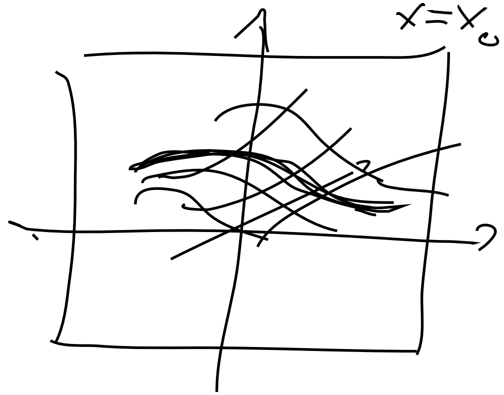


Bemerkungen: a) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

mit $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen

Dann ist f genau dann stetig, wenn alle f_i stetig sind.

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\left(x_0 \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x_0, y) \end{array} \right)$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Für jedes feste $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $y \longmapsto \underline{f(x_0, y)}$ stetig

— " — $y_0 \in \mathbb{R}$ — " — $x \longmapsto f(x, y_0)$ stetig

aber f ist <u>nicht</u> stetig:

denn $\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right)_{k \geq 1} \longrightarrow (0, 0)$

aber $f\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right) = \dfrac{\frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{2}{k}\right)^2} = \dfrac{2}{5} \not\longrightarrow 0 = f(0, 0)$

<u>Beispiel:</u> $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x \cdot y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x + y$$

Zusammensetzungen stetiger Fkt. sind stetig

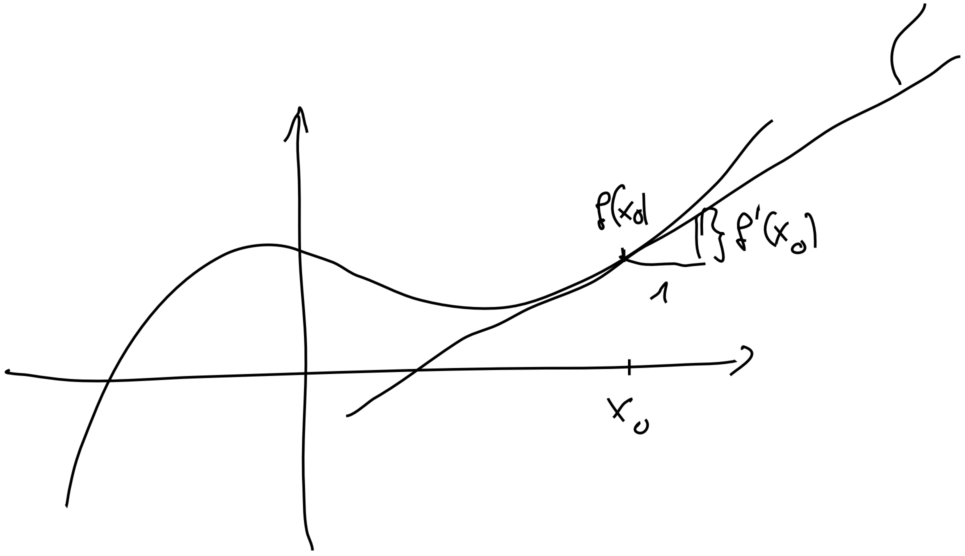
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \sin(x) + \exp(y) \cdot x$$

Differenzierbarkeit

zunächst für $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Erinnerung: $n=1$

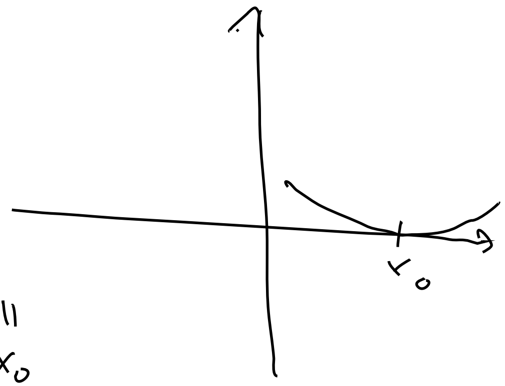
$f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$



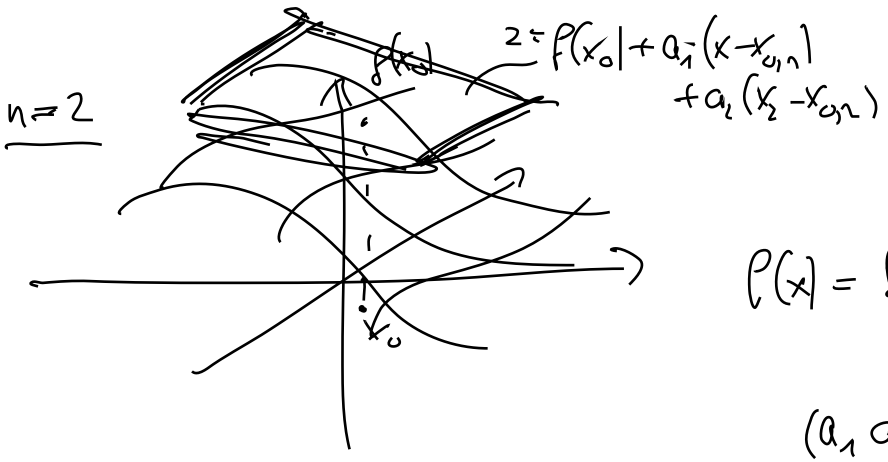
$f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an.

Mit anderen Worten:

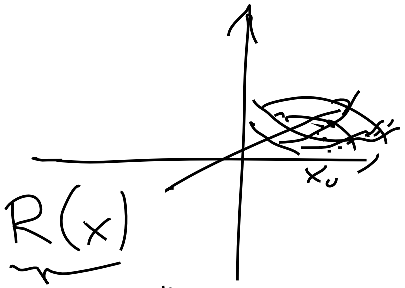
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{Konstante}} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{lin. Abbildung}} + \underbrace{R(x)}_{\text{sehr schnell klein bei } x_0}$$



<ins>$n=2$</ins>



$f'(x_0)$ sollte analog die Tangentialebene am Punkt x_0 beschreiben.



$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{a_1 \cdot (x_1 - x_{0,1}) + a_2(x_2 - x_{0,2})}_{\text{lin. Abbildung } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} + \underbrace{R(x)}_{\text{sehr schnell klein bei } x_0}$$

$$(a_1\ a_2)\cdot\begin{pmatrix} x_1 - x_{1,0} \\ x_2 - x_{2,0}\end{pmatrix}$$

<u>Definition:</u> $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt (total) differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^n$

falls eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert

(durch $n \times 1$ Matrix beschrieben)

mit

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{konstant}} + \underbrace{A \cdot (x - x_0)}_{\text{linear}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Rest}}$$

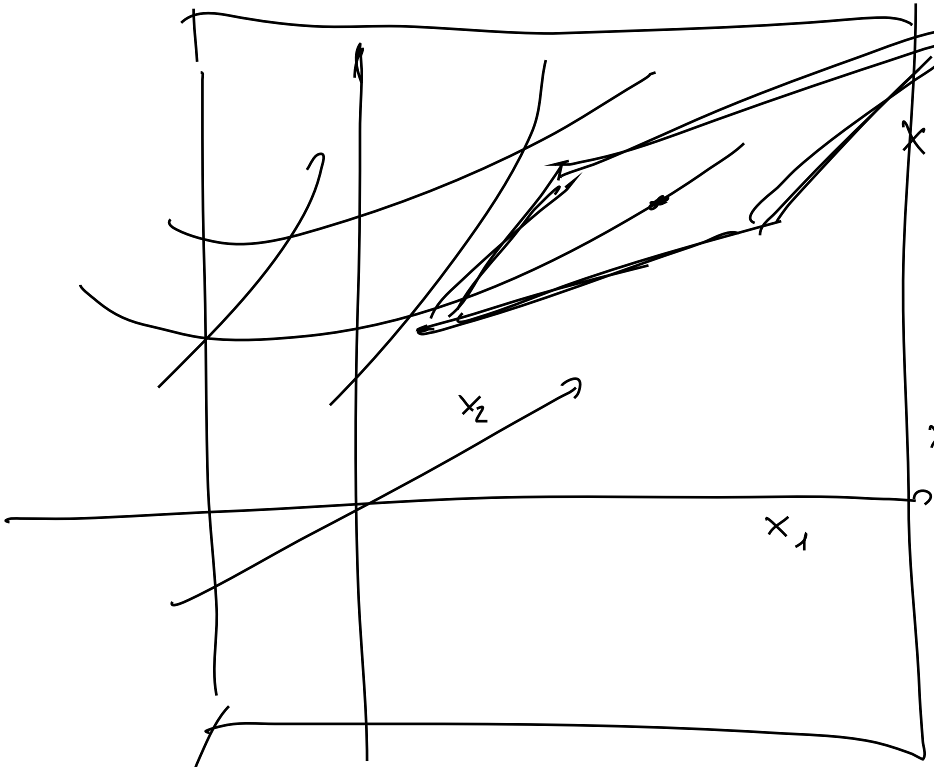
wobei

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|R(x)|}{\|x - x_0\|} = 0$$

<u>Bemerkung:</u> $f(x_0) + A(x - x_0)$ beschreibt also die Tangentialebene am Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Sie ist der Untervektorraum

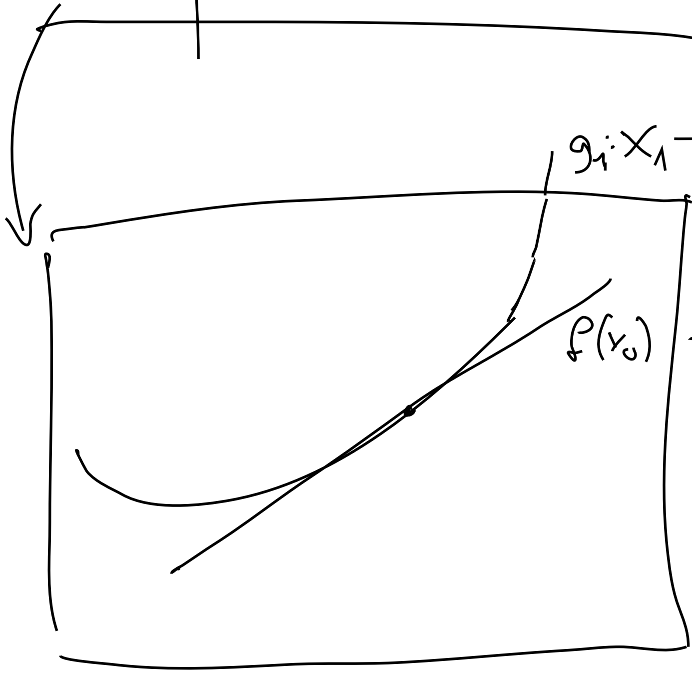
$x \longmapsto (x, Ax)$ verschoben an den Punkt $(x_0, f(x_0))$ am Graphen von f.



$x \mapsto f(x_0) + a_1(x_1 - x_{1,0}) + a_2(x_2 - x_{2,0})$

$x_2 = x_{2,0}$

$g_1 : x_1 \longrightarrow f(x_1, \underline{\underline{x_{2,0}}})$



$f(x_0) + a_1(x_1 - x_{1,0})$

$a_1 = g_1'(x_{1,0})$

g_1' heißt partielle Ableitung von f nach x_1.

Die lineare Abbildung A heißt dann Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0. Bezeichnung:

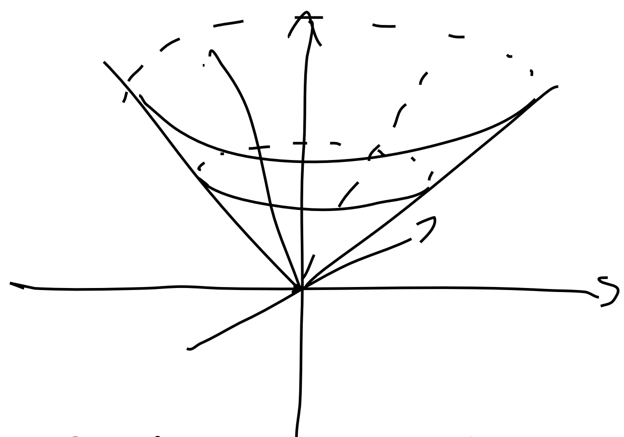
$$f'(x_0) \qquad \text{bzw.} \qquad Df(x_0) \qquad (\text{Jacobimatrix})$$

Bem: A ist eindeutig bestimmt, wenn die Ableitung existiert.

Beispiel: a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \|x\|$

nicht differenzierbar bei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Falls f in x_0 differenzierbar ist, so wird $Df(x_0)$ durch eine $(m \times 1)$-Matrix beschrieben (bzgl. der Standardbasis)

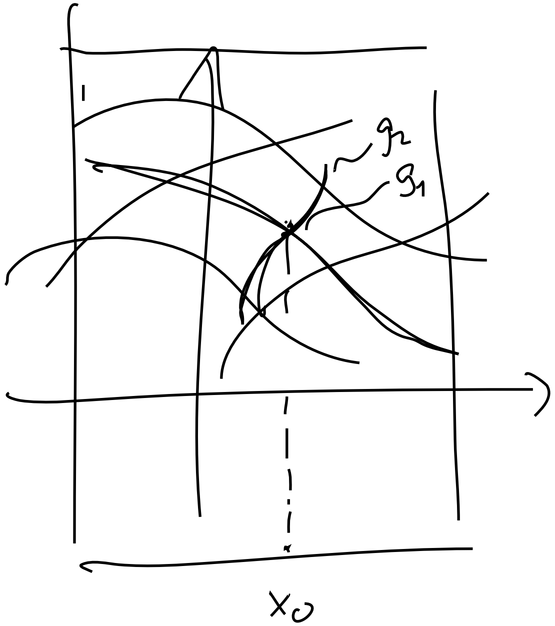
Die Einträge sind die sogenannten partiellen Ableitungen.

Für festes $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ und $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

definieren wir: $g_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$x \longmapsto f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0)$$



Die i-te partielle Ableitung von f im Punkt x_0 ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = g_i'(x_0)$$

<u>Beispiel:</u> $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$$Df(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \frac{\partial}{\partial x_2} f\right) = (2x_1, 2x_2)$$

<u>Also:</u> Die Einträge in der Matrixdarstellung von $Df(x_0)$ sind die partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0)$

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_0)\right)$$

<u>Bemerkung:</u> Der Vektor

$$(Df(x_0))^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt auch Gradient von f bei x_0 (zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs)

Definition:

a) f (total) differenzierbar in x_0 : $Df(x_0)$ existiert (wie vorher)

b) f partiell differenzierbar in x_0 : alle $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0)$ existieren.

c) f stetig partiell differenzierbar in x_0

Es gibt eine Umgebung U von x_0 (o.E. $U = D_\varepsilon(x_0)$)

so dass für alle $x \in U$ ist f partiell diff.-bar in x

und die Funktionen $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ sind alle stetig auf U.

Zusammenhänge:

f stetig partiell diff.-bar in x_0

$\Downarrow$

f stetig in x_0 $\Longleftarrow$ f total diff.-bar in x_0

$\Downarrow$

f part. diff.-bar in x_0

Die Umkehrungen gelten jeweils nicht!