Erinnerung Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- stetig
- differenzierbar in x_0:

  es gibt lineares $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

  $$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + R(x)$$

  und $$\lim_{x \to x_0} \frac{|R(x)|}{\|x - x_0\|} = 0$$

  $$A = f'(x_0) = Df(x_0) \quad (\text{auch } df(x_0) \ldots)$$

  - beste lineare Annäherung an f in x_0
  - geometrisch: Tangentialhyperebene am Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$

- partiell differenzierbar in x_0:

  Ableitung der „partiellen Funktionen" in Richtung der Koordinatenachsen,

  $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad (\text{auch } \partial_i f, D_i f \ldots)$$ Einträge der Jacobi-Matrix

Im Fall $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Jacobi-Matrix = Gradient

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = \operatorname{grad} f(x_0) \qquad \left(\text{auch } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nabla}}}{\nabla} f(x_0) \right)$$

- stetige Differenzierbarkeit:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^n \longmapsto Df(x_0) \in \text{Lineare Abbildungen } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\cong \quad \operatorname{Mat}_{1\times n}(\mathbb{R}) \cong \underline{\underline{\mathbb{R}^n}}$$

- stetig partielle Differenzierbarkeit in x_0:

alle $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ existieren in Umgebung von x_0 und sind stetig in x_0

(d.h. auf $D_\varepsilon(x_0)$)

partiell differenzierbar in x_0 $\Longrightarrow$ Stetigkeit der „partiellen Funktionen" in x_0

$\Uparrow$ $\quad\quad$ $\Uparrow$

differenzierbar in x_0 $\Longrightarrow$ stetig in x_0

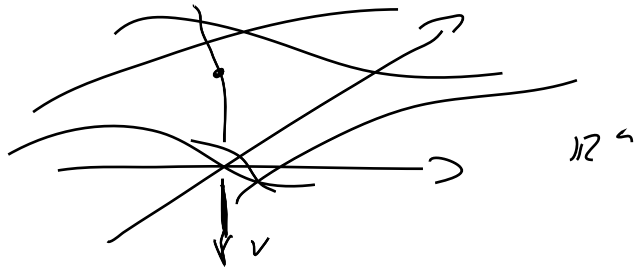
$\Uparrow$

stetig differenzierbar in x_0 $\Longleftrightarrow$ stetig partiell differenzierbar in x_0

$\Uparrow$ $\quad\quad$ $\Uparrow$

schöne Fkt: stetig differenzierbar in Umgebung U von x_0 (offene Menge U) $\Longleftrightarrow$ stetig partiell differenzierbar in U

Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$



$$D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

$$\left(\text{insbesondere } \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i} \right)$$

$\leftarrow$ i-ter Standardbasisvektor

f (total) differenzierbar in x_0 $\Longrightarrow$ alle Richtungsableitungen in x_0 existieren

$$\not\Longleftarrow$$

Satz: $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$\uparrow$ Skalarprodukt

$$\| \operatorname{grad} f(x_0) \| \cdot \| v \| \cdot \cos \alpha$$

α = Winkel zwischen v und $\operatorname{grad} f(x_0)$

$\|v\| = 1$: $\displaystyle\left| \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \right| \leq \| \operatorname{grad} f(x_0) \|$ d.h. grad f gibt die Richtung der größten Steigung an!

$\varepsilon > 0$

„Weg": $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, differenzierbar

$\cap$

$\mathbb{R}$

f differenzierbar in x_0 $\Leftrightarrow$ alle Funktionen $f \circ g$ mit g wie oben in 0 differenzierbar sind

d.h. f ist in x_0 längs aller „Wege" differenzierbar

höhere Ableitungen?

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f' : \mathbb{R}^n \longrightarrow$ lin. Abb von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$

$x_0 \longmapsto f'(x_0)$

<u>allgemein</u>: $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\underset{(f_1,\dots,f_m)}{\overset{\shortparallel}{f}} \qquad x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x) \big)$$

solche Funktionen heißen auch „Vektorfelder"

(aus Physik: z.B. wirkende Kraft an jedem Punkt des Raumes)

$$f \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{stetig} \\ \text{differenzierbar} \\ \text{partiell differenzierbar} \\ \text{stetig differenzierbar} \\ \quad \text{etc} \end{array} \right\} \text{ in } x_0 \iff \begin{array}{l} \text{jede der Komponentenfunktionen } f_i \\ \text{hat in } x_0 \text{ die betreffende} \\ \text{Eigenschaft.} \end{array}$$

Differenzierbarkeit

Def: f differenzierbar in x_0

:⟺ es gibt lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

mit $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x)$

und $\lim_{x \to x_0} \frac{\| R(x) \|}{\| x - x_0 \|} = 0$

A ist „beste lineare Annäherung" an f in x_0

$A = f'(x_0) = Df(x_0)$

Satz: f differenzierbar in x_0 ⟺ alle f_i sind differenzierbar in x_0

Jacobi-Matrix

bzgl. Standardbasen wird A dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

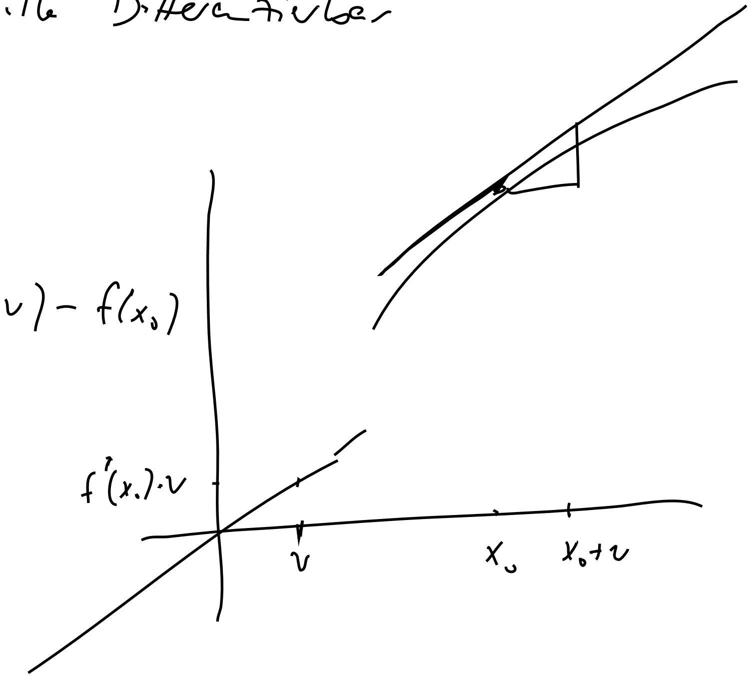
auch hier: Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ partielle Differenzierbarkeit
$\not\Leftarrow$

stetige Differenzierbar $\Leftrightarrow$ stetig partielle Differenzierbar

$Df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildung

$Df(x_0)(v) = Df(x_0) \cdot v$ ist „ungefähr" $f(x_0+v) - f(x_0)$

als Abbildung als Matrix Matrixmultiplikation



Rechenregeln für differenzierbare Abbildungen

Linearität: $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x_0, $c \in \mathbb{R}$

dann sind auch $f+g$, $c \cdot f$ differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$$

$$D(c \cdot f)(x_0) = c \cdot Df(x_0)$$

Nachtrag: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\quad f$ differentierbar in $\mathbb{R}^n$

$Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear

$$Df : x_0 \mapsto Df(x_0) \qquad \mathbb{R}^n \to \underset{\mathbb{R}}{\text{Linear Abbildungen}}\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

auch $Df : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (linear im 2. Argument)

$$(x_0, v) \mapsto Df(x_0)(v)$$

daher auch: $Df(x_0, v)$

Produktregel ($m=1$): $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, differenzierbar in x_0

Dann ist auch $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 mit

$$D(f\cdot g)(x_0)(v) = f(x_0) \cdot \left[Dg(x_0)(v) \right] + g(x_0) \cdot \left[Df(x_0)(v) \right]$$

$$\operatorname{grad}(f \cdot g)(x_0) = f(x_0) \cdot \operatorname{grad} g(x_0) + g(x_0) \cdot \operatorname{grad} f(x_0)$$

(es gibt Verallgemeinerungen für $m > 1$)

Kettenregel: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ — " — in $f(x_0) \in \mathbb{R}^m$

dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und

$$D(g \circ f)(x_0) = D(g)(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$$

Sonderfall: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0

$g: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = x_0$, differenzierbar in 0

$$(f \circ g)'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \cdot \begin{pmatrix} g_1'(0) \\ \vdots \\ g_n'(0) \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot g'(0)$$

„Ableitung von f längs des Weges g"

„Tangentialvektor an den Weg g"

Umkehrabbildung:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv
differenzierbar in x_0
f^{-1} stetig in $f(x_0)$
$\det Df(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ f^{-1} differenzierbar in $f(x_0)$
und
$Df^{-1}(f(x_0)) = \left(Df(x_0)\right)^{-1}$

Jacobi-Matrix von f^{-1} an der Stelle $f(x_0)$ ist das Inverse von der Jacobi-Matrix von f an der Stelle x_0.

(etwas allgemeiner:
$f: U \to \mathbb{R}^n$ injektiv
U offen, $x_0 \in U$)