# Wiederholung und Beispiel: (und Korrektur)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2mal differenzierbar, $\underbrace{x_0 \in \mathbb{R}^n}_{\text{„Stelle"}}$, $\underbrace{v \in \mathbb{R}^n}_{\text{„Richtung"}}$

Ableitung in Richtung $v$ an der Stelle $x_0$ $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ : $\overset{f'(x_0)}{\underbrace{df(x_0)}_{\text{lin. Abb}}}(v) = \underbrace{\operatorname{grad} f(x_0)}_{\text{zug. Matrix}} \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot v_i$

2. Ableitung in Richtung $v$ an der Stelle $x_0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x_0)$ : $\overset{f''(x_0)}{\underbrace{d^2 f(x_0)}_{\text{bilin. Abb}}}(v,v) = v^T \cdot \underbrace{Hf(x_0)}_{\text{Hesse-Matrix}} \cdot \underbrace{v}_{\text{Spaltenvektor}}$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \cdot v_i v_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} v_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j$$

$H$ heißt positiv definit,

falls $v^T \cdot H \cdot v > 0$ für alle $v \neq 0$

$\Vert$

$(x - x_0)^T \cdot H \cdot (x - x_0) > 0$ für alle $x \neq x_0$

analog negativ definit, indefinit

$f(x,y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2 \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\operatorname{grad} f = (10x + 4y,\ 4x + 4y)$ Kritische Punkte: $(0,0)$

$Hf = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ unabhängig von der Ableitungsstelle

Eigenwerte von $Hf$? $\begin{vmatrix} 10-x & 4 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix} = (10-x)(4-x) - 16 = x^2 - 14x + 24$

$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49-24} = \begin{cases} 2 \\ 12 \end{cases}$

Eigenvektoren zu den Eigenwerten? $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

zum Eigenwert 12 z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ } Länge $\sqrt{5}$

<u>Satz</u>: Für symmetrische Matrizen mit reellen Einträgen sind diagonalisierbar bzgl einer <u>Orthonormalbasis</u>, d.h. die <u>Vektoren der Basis</u> stehen paarweise senkrecht aufeinander und haben Länge 1

dies sind Eigenvektoren!

<u>Hier</u>: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}}_{M^{-1}=M^T}\underbrace{\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}}_{H}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}}_{M}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

$\cup$

$\cap$

Nun: $v^T\cdot H\cdot v = w^T\cdot M^T\cdot H\cdot M\cdot w = w^T\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}\cdot w = \underbrace{2\cdot w_1^2+12\cdot w_2^2}_{\geq 0}$

$w=M^{-1}\cdot v$ $\qquad$ $w=\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}$

$=0 \iff w_1=w_2\,0$

$\|v\|=\|w\|=1:\quad 2\leq v^T\cdot H\cdot v\leq 12$

2 = kleinster Eigenwert von $Hf(x_0)$ = kleinste „Richtungskrümmung"

12 = größte — " — = größte „Richtungskrümmung"

$f_{v_1}: t\mapsto \overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}}^{v_1} t\to f$ $\quad , t\mapsto \frac{5t^2}{5}+\frac{-8t^2}{5}+\frac{8t^2}{5}=t^2$ $\qquad f''_{v_1}(t)=2$

$\underbrace{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}}_{\text{partielle Funktion in Richtung } \binom{1}{-2} \text{ normiert}}$

$f_{v_2}: t\mapsto \frac{20t^2}{5}+\frac{8t^2}{5}+\frac{2t^2}{5}=6t^2$ $\qquad f''_{v_2}(t)=12$

$v_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

## Vektorfelder (hauptsächlich aus der Physik)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Skalarfelder:} & f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \text{Vektorfeld:} & V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \text{ hinreichend oft stetig differenzierbar}$$

**Gradientenfeld** $\operatorname{grad} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \operatorname{grad}(f)(x)$ eigentlich $\underbrace{\text{lin Abb}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}}_{\cong\, \mathbb{R}^3 \text{ als Matrix}}$

**Divergenz** $\operatorname{div} V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}(x)$

**Rotation** $\operatorname{rot} V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

**Laplace-Operator** $\Delta f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x)$

Eigenschaften

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$$

„Gradientenfelder sind wirbelfrei"

umgekehrt: gegeben $V$, dann existiert $f$ mit

$$\operatorname{grad}(f) = V \iff \operatorname{rot}(V) = 0$$

(bei „schönen" Definitionsgebieten)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} V) = 0$$

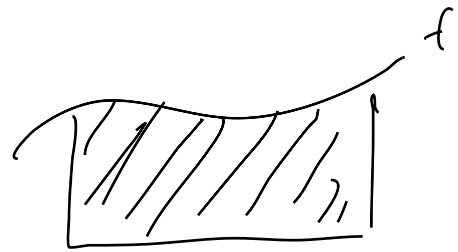
$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} V) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} V) - \Delta V$$

komponentenweise

---

Satz von Stokes




Stammfunktion $F$

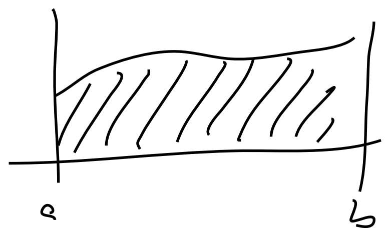
# Integration im Höherdimensionalen

Achtung: viele verschiedene Arten der Integration!

① Volumenbestimmung

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

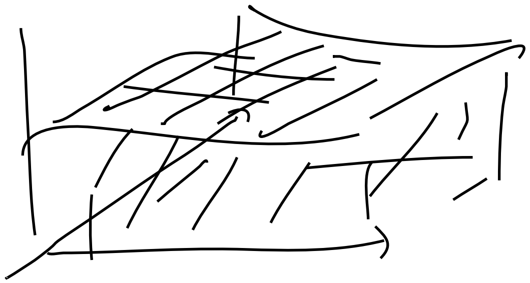
$n=1$




$\int_a^b f(x)\,dx$

Flächeninhalt unterhalb des Graphen von $f$

$n=2$

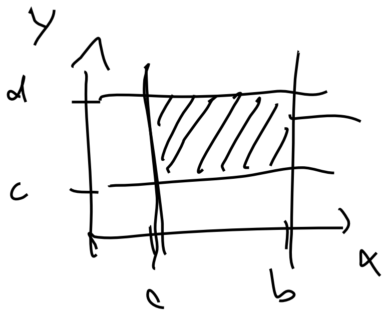


Volumen zwischen $(x_1,x_2)$-Ebene und Graph von $f$

ⓐ einfacher Fall: Grundfläche ist ein Rechteck

Integration wird auf 1-dimensionale Integration zurückgeführt

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

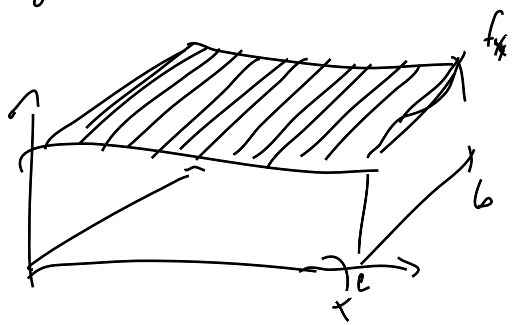



Integrations-grundfläche

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\| \quad \text{Satz von Fubini: Reihenfolge ist gleichgültig}$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \qquad (f \text{ stetig})$$



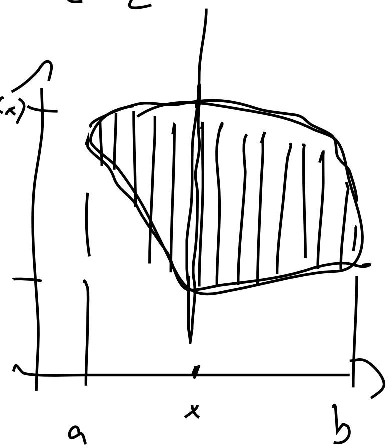
Bsp: $f(x,y) = 2$

$$\int_a^b \int_c^d 2\,dy\,dx = \int_a^b 2y\Big|_c^d dx = \int_a^b 2d-2c\,dx = (2d-2c)\cdot x\Big|_a^b$$

$$= (2d-2c)b - (2d-2c)\cdot a = 2\cdot(d-c)(b-a)$$

Volumen des Quaders über $[a,b]\times[c,d]$ der Höhe 2

(b) Grundfläche $G$ ist Normalbereich:



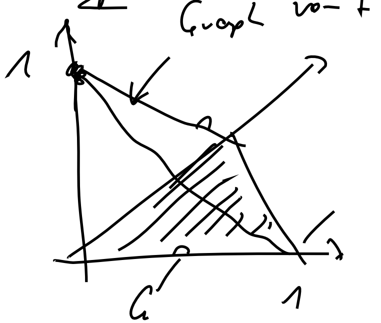

in y-Richtung jeweils ein Intervall, Intervallgrenzen sind stetige Funktionen in x

$g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$(x,y) \in G \iff x \in [a,b]$
$\quad y \in [g_1(x), g_2(x)]$

Und analog in x-Richtung!

Bsp:




$f(x,y) = 1-x-y$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-x-y\,dy\,dx$$

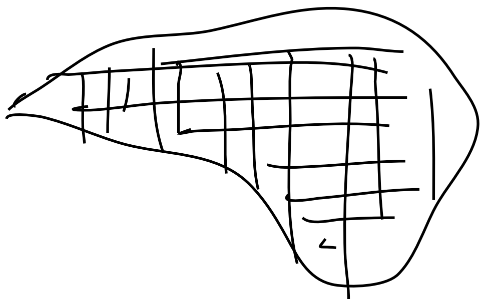
$g_1(x) = 0$

$g_2(x) = 1-x$

(Fubini: Reihenfolge ist unerheblich)

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \underbrace{1-x-y}\, dy\, dx = \int_0^1 (1-x)\cdot y - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 - 0 + 0 \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2 dx = -\frac{1}{6}(1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$



__Bem.:__ $G \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \int_G 1 \, dx\, dy$ = Fläche von $G$

$V \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \int_V 1 \, dx\, dy\, dz$ = Volumen von $V$

## ② Weg- oder Kurvenintegrale

__Variante 1:__ $g: \underset{\mathbb{R}}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige Funktion

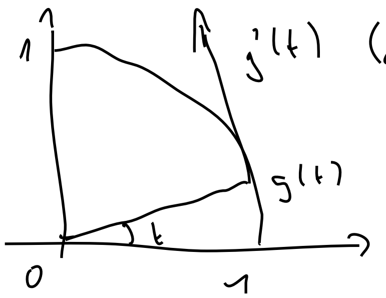
„Integral von $f$ längs des Weges $g$" $\qquad \int_a^b f(g(t)) \cdot \| g'(t) \| \, dt$

mittlerer Wert von $f$ auf dem Weg $g$
· Länge der Kurve

Spezialfall: konstante Funktion $f = 1$

$$\int_a^b \|g'(t)\|\,dt$$ „Bogenlänge" (Länge der Kurve)

Beispiel:

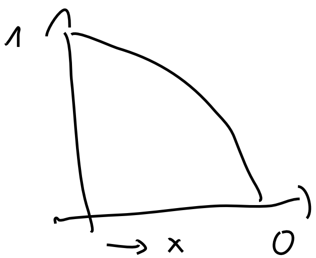



(I) $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad t \to (\sin t, \cos t)$

$g'(t) = (\cos t, -\sin t)$

Bogenlänge $= \displaystyle\int_0^{\pi/2} \|g'(t)\|\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + (-\sin^2 t)}_{1}}\,dt = \frac{\pi}{2}$

(II)




$h : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$

Bogenlänge-parametrisierung

$h'(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$

$$\int_0^1 \|h'(t)\|\,dt = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Substitution $t \mapsto \sin t$ $\quad \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cos t\,dt = \frac{\pi}{2}$

Variante 2:

$g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar

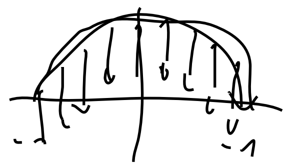
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$$

„Arbeit" für die Bewegung eines Teilchens im Vektorfeld $f$ längs $g$

Bsp: $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ konstantes Vektorfeld $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$



„Arbeit" $$\int_{-1}^{1} V(g(t)) \cdot g'(t) \cdot dt =$$

$$\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0$$

$$\left( \int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -1 \right)$$