Dr. Markus Junker — Diskrete Algebraische Strukturen — Sommer 2011
Übungsblatt 10

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

1. **Invarianz des Skalarproduktes unter Drehungen.** Beweisen Sie, dass eine Drehung im $\mathbb{R}^2$, also eine Abbildung, welche durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

beschrieben wird, das Skalarprodukt invariant lässt. Mit anderen Worten, rechnen Sie nach, dass

$$\langle M \cdot v, M \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ ist.

Zusatzfrage (4 Extrapunkte): Bestimmen Sie die Matrizen aller Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Skalarprodukt invariant lassen.

2. **Determinante.**

   (a) Berechnen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

3. **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.**

Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle.$$

Hinweis: Es reicht ausschliesslich die Eigenschaften (a)-(c) auszunutzen (und nicht die Definition zu verwenden). Beweisen Sie auf diese Weise zunächst:

$$0 \leq \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle$$

für eine beliebige reelle Zahl λ. Wählen Sie λ nun geschickt so, dass Sie die folgende Gleichung erhalten:

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle}$$

Bitte wenden!

4. **Abbildungen und Matrizen II.**

(a) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade, welche durch den Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Definiere eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche einen Punkt auf sein senkrechtes Lot (Projektion) auf die Gerade G abbildet. Finden Sie die Matrix für φ.

(b) Interpretieren Sie die Abbildung, welche durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben wird, geometrisch.

Abgabe am 18.7.2011 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung

Zur Erinnerung: Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

durch

$$\langle v, w \rangle := (v^T) \cdot w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

definiert.

Erinnere, dass es die folgenden Eigenschaften hat:

(a) **bilinear:**

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle,$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle,$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle.$$

Hier ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

(b) **symmetrisch:**

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle.$$

(c) **positiv definit:**

$$\langle v, v \rangle \geq 0,$$

wobei 0 nur auftritt, falls $v = 0$ ist.