Dr. Markus Junker — Diskrete Algebraische Strukturen — Sommer 2011
Übungsblatt 12

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte.

1. **Totale Differenzierbarkeit I.** Berechnen Sie die totale Ableitung (Jacobi-Matrix) der folgenden Funktionen
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
in Abhängigkeit von x und y:
   (a) $f(x, y) = \sin(x) \cdot y + \cos(y) \cdot x$.
   (b) $f(x, y) = (x + y)^3$.
   (c) $f(x, y) = \frac{1+x+y}{x^2+y^2+1}$.
   (d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

2. **Totale Differenzierbarkeit II.** Berechnen Sie die totale Ableitung (Jacobi-Matrix) der folgenden Funktion
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(z) & -\sin(z) \\ \sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
in Abhängigkeit von x, y und z.

3. **Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht die totale Differenzierbarkeit.** Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Beispiel aus der Vorlesung)
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$
sogar partiell differenzierbar nach x und y in jedem Punkt ist.

   Wie wir gesehen haben, ist f allerdings *nicht einmal stetig* in 0 und deshalb auch nicht total differenzierbar. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen (in jedem Punkt) und beweisen Sie, dass sie nicht stetig in 0 sind.

Bitte wenden!

4. **Vektorfelder.** Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ die Karte eines Landes der Erde. In jedem Punkt $x \in U$ werde die Windrichtung und -stärke durch einen Vektor $w_x \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Ein sich bewegender Ballon kann durch eine Kurve

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

parametrisiert werden. Dabei bedeutet $f(t)$ die *Position* des Ballons zur Zeit t. Der Ballon bewegt sich nun mit dem Wind in der folgenden Weise: Es gilt zu jedem Zeitpunkt t

$$f'(t) = w_{f(t)}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist also genau durch die Windrichtung und -stärke gegeben.

Nehmen Sie an, dass der Wind für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ durch

$$w_x = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Finden Sie für einen Ballon mit $f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch geometrische Überlegung die Flugbahn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und rechnen Sie nach, dass tatsächlich die Gleichung $f'(t) = w_{f(t)}$ erfüllt ist. Berechnen Sie anschliessend den Vektor der Beschleunigung zum Zeitpunkt t (dies ist $f''(t)$).

Zusatzfrage (4 Punkte): Berechnen Sie $f''(t)$ für eine beliebige Windfunktion $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von $f(t)$, $w_{f(t)}$ und der Jacobi-Matrix von w bei $f(t)$ — ohne f explizit zu kennen.

Abgabe am 1.8.2011 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung