

Verantwortlich für die Übungen:

Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

Jede Aufgabe zählt 4 Punkte. Für die mit * gekennzeichnete Aufgabe gibt es 4 Zusatzpunkte.

1. **Die Definition des Gruppenhomomorphismus.** Seien G und H zwei Gruppen und

$$f : G \rightarrow H$$

eine Abbildung, welche

$$f(a \circ b) = f(a) \circ f(b) \quad \text{für alle } a, b \in G$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass f automatisch ein Gruppenhomomorphismus ist, d.h. dass f auch die Bedingungen $f(e) = e$ und $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ für alle $a \in G$ erfüllt.

2. **Beispiele von Gruppenhomomorphismen.**

(a) Sei k ein Körper (z.B. $k = \mathbb{R}$). Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \det : \mathrm{GL}_2(k) &\rightarrow (k^*, \cdot) \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \det(A) = ad - bc. \end{aligned}$$

Rechnen Sie nach, dass es sich um einen Gruppenhomomorphismus handelt.

*(b) Geben Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$S_3 \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

an.

3. **Erzeugung der symmetrischen Gruppen.** Betrachte die Gruppe S_n der Bijektionen der Menge $\{1, \dots, n\}$ in sich. Erinnerung: Das Gruppengesetz wird durch die Hintereinanderausführung von Funktionen gegeben.

Eine **Transposition** $\sigma \in S_n$ ist eine bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : \{1, \dots, n\} &\rightarrow \{1, \dots, n\} \\ k &\mapsto \begin{cases} k & \text{falls } k \notin \{i, j\}, \\ i & \text{falls } k = j, \\ j & \text{falls } k = i, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei i und j zwei verschiedene Zahlen in $\{1, \dots, n\}$ sind. Mit anderen Worten: σ vertauscht die Zahlen i und j und lässt alle anderen fest.

Beweisen Sie, dass S_n von diesen Transpositionen erzeugt wird.

Zusatz (freiwillig): Versuchen Sie eine minimale Menge unter den Transpositionen zu finden, welche S_n erzeugen.

Bitte wenden!

4. **Untergruppen.** Betrachte die (nicht kommutative) Gruppe D_4 der Symmetrien eines Quadrats (Rotationen und Spiegelungen, welche das Quadrat in sich überführen). Das Gruppengesetz ist wiederum durch die Hintereinanderausführung von Abbildungen gegeben. Sei σ die Rotation um 90 Grad (gegen den Uhrzeigersinn) und τ die Spiegelung an der x -Achse. Diese Elemente erzeugen D_4 :

1	Identität
σ	Rotation um 90 Grad
σ^2	Rotation um 180 Grad
σ^3	Rotation um 270 Grad
τ	Spiegelung um die x -Achse
$\sigma\tau$	Spiegelung an der Hauptdiagonalen
$\sigma^2\tau$	Spiegelung an der y -Achse
$\sigma^3\tau$	Spiegelung an der Nebendiagonalen

Hier haben wir z.B. „ $\sigma\tau$ “ für die Hintereinanderausführung $\sigma \circ \tau$ geschrieben. Dies bedeutet, dass **zuerst τ und dann σ** ausgeführt wird.

Es gelten die Relationen $\sigma^4 = 1$, $\tau^2 = 1$ und $\tau\sigma\tau = \sigma^3$. Mit Hilfe dieser lassen sich alle Ausdrücke in σ und τ wieder auf eine der 8 Formen in der Tabelle bringen.

Bestimmen Sie alle 10 Untergruppen von D_4 und geben Sie die Ordnungen der Elemente an.

5. **Programmieraufgabe (alternativ zu Aufgabe 4):** Schreiben Sie eine Prozedur welches zu einer gegebenen Gruppe (wie im letzten Übungsblatt, Aufgabe 3) alle Untergruppen auflistet. Wenden Sie dies auf die Gruppe D_4 an.

Hinweis: Repräsentieren Sie eine Untermenge der Gruppe (mit n Elementen) als eine Binärzahl mit n Bits. Testen Sie dann für jede dieser Untermengen ob die Untergruppenbedingung erfüllt ist. Falls ja, soll die Untermenge ausgegeben werden. Dieser Algorithmus ist natürlich recht naiv und wird für grosse Gruppen schnell zu langsam.

Abgabe am 16.5.2011 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung