Dr. Markus Junker — Diskrete Algebraische Strukturen — Sommer 2011

Übungsblatt 8

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Lineare Abbildungen** (2 Punkte). Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, die die Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf $v_1, \ldots, v_n$ abbildet.

2. **Spiegelungen** (2 Punkte). Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein fest gewählter Vektor, und sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung mit Spiegelungsachse

$$\left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Geben Sie die Matrix für φ an.

3. **Lineare Abbildungen der Ebene.** Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige *invertierbare* lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass sich φ als Hintereinanderausführung einer Drehung, einer Scherung an der x-Achse und einer Streckung an den Achsen beschreiben lässt. Berechnen Sie dies explizit.

Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:

(a) *Sei* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *die Matrix, die die Abbildung* φ *beschreibt. Die Matrix*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

erfüllt die Eigenschaft $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Rechnen Sie dies nach. Bezeichnen Sie die Spaltenvektoren von* A^{-1} *mit* v_1 *und* v_2.

(b) *Bestimmen Sie die Matrix* $D = \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$ *(mit* $e^2 + f^2 = 1$*) einer Drehung, die* v_1 *auf die* x*-Achse dreht. Seien* $w_1 := D \cdot v_1$ *und* $w_2 := D \cdot v_2$. *Das heisst also:* w_1 *liegt auf der* x*-Achse!*

Bitte wenden!

(c) *Bestimmen Sie die Matrix* $C = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *einer Scherung entlang der* x*-Achse, die* w_2 *auf die* y*-Achse schert. Seien* $x_1 := C \cdot w_1$ *und* $x_2 := C \cdot w_2$*.*

(d) *Bestimmen Sie die Matrix* $B = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ *einer Streckung an den Achsen, die* x_1 *auf* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* x_2 *auf* $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *abbildet.*

(e) *Begründen Sie, dass* $A = B \cdot C \cdot D$ *gilt.*

4. **Komplexe Zahlen als $\mathbb{R}$-Vektorraum.** Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lassen sich als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen. Beweisen Sie, dass die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist. Wir können $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, indem wir eine komplexe Zahl $c + di$ $(c, d \in \mathbb{R})$ als Vektor $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ auffassen. Die lineare Abbildung φ_z wird dann durch eine Matrix beschrieben. Welche?

5. **Fibonacci-Zahlen.** Die Fibonacci-Zahlen sind durch

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, \ldots$$

definiert. Allgemein ist $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Bestimmen Sie eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ so, dass F_n unter den Einträgen von

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n\text{-mal}}$$

vorkommt.

Abgabe am 4.7.2011 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung