Dr. Markus Junker — Diskrete Algebraische Strukturen — Sommer 2011
Klausurbeispiel — Lösungen

1.

$$\begin{array}{rcl}
91 &=& 1\cdot 56 + 35 \\
35 &=& 1\cdot 91 - 1\cdot 56 \\ \hline
56 &=& 1\cdot 35 + 21 \\
21 &=& 56 - 1\cdot 35 = 56 - (91-56) = 2\cdot 56 - 91 \\ \hline
35 &=& 1\cdot 31 + 14 \\
14 &=& 35 - 21 = 91 - 56 - (2\cdot 56 - 91) = 2\cdot 91 - 3\cdot 56 \\ \hline
21 &=& 1\cdot 14 + 7 \\
\mathbf{7} &=& 21 - 14 = (2\cdot 56 - 91) - (2\cdot 91 - 3\cdot 56) = \mathbf{5\cdot 56 - 3\cdot 91}
\end{array}$$

D.h. der g.g.T. ist 7 mit dieser Zerlegung.

2. systematische Lösung mit dem Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{array}{rcl}
20 &=& 2\cdot 7 + 6 \\
6 &=& 20 - 2\cdot 7 \\ \hline
7 &=& 1\cdot 6 + 1 \\
1 &=& 7 - 6 = 7 - (20 - 2\cdot 7) = 3\cdot 7 - 20
\end{array}$$

Die letzte Gleichung bedeutet gerade

$$\overline{1} = \overline{3}\cdot\overline{7}$$

in $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. D.h. $\overline{3}$ ist das gesuchte multiplikative Inverse.

3. Die Matrix einer linearen Abbildung enthält gerade die Bilder der Einheitsvektoren in den Spalten. Man überlegt sich leicht geometrisch, dass

$$s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die Matrix durch

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

gegeben.

4. Die Basiswechselabbildung S ist die Abbildung, welche die neuen Basisvektoren (in der alten Basis ausgedrückt) als Spalten enthält. Wir haben hier also:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der Abbildung A bzgl. der neuen Basis ist dann

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

6. Die Ebene ist der Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3, 4, -1 \end{pmatrix}$$

welche bereits “Zeilenstufenform” hat. Die erste Spalte (zur Variable x) ist die Pivotspalte und die restlichen Variablen können wir als freie Parameter wählen. Wir erhalten

$$\ker A = \{y \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Daher ist eine Basis durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Beachten Sie, dass eine Basis keinesfalls eindeutig ist! Überprüfen Sie, dass Sie genau zwei Basisvektoren gefunden haben, diese $A \cdot v = 0$ erfüllen und nicht Vielfache voneinander sind. In diesem Fall sind sie korrekt.

7. Wir müssen das Gaussverfahren auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

anwenden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & -4 & 8 & -5 \\ 0 & -8 & 16 & -10 \\ 0 & -12 & 24 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & -4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die ersten zwei Spalten (und nur diese) Pivotspalten sind, folgt, dass die ersten beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

bereits eine Basis des Unterraumes bilden.

8. Unter den Resten

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

sind nur

$$\{1, 5, 7, 11\}$$

teilerfremd zu 12. Durch Multiplizieren (und erneute Restbildung modulo 11) erhalten wir die Gruppentafel

$\cdot$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

Die Gruppe hat die Struktur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

9. Die Zykeldarstellung dieser Permuation ist

$$\varphi = (17632)(4)(59)(8) = (17632)(59)$$

(Zykel der Länge 1 lässt man üblicherweise weg).

Es gibt also einen Zykel der Länge 5 und einen der Länge 2. Deshalb ist

$$\varphi^{10} = \mathrm{id}$$

in S_9. 10 muss aber auch die Ordnung von φ sein, da $\varphi^2 = (16273) \neq \mathrm{id}$ und $\varphi^5 = (59) \neq \mathrm{id}$.

10. Wir berechnen

$$H \cdot c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die 1. Spalte von H, d.h. das 1. Bit muss korrigiert werden. Anschliessend streichen wir die letzten 4 Prüfbits und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

als dekodierten Vektor.

11. Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) & \frac{d}{dy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + 6 \cdot y + 90; & 3 \cdot y^2 + 6 \cdot x - 3 \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{(dx)^2} f(x,y) & \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} f(x,y) \\ \frac{d}{dy}\frac{d}{dx} f(x,y) & \frac{d^2}{(dy)^2} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 6 \cdot y \end{pmatrix}$$

Die Extremstellen sind die Nullstellen der Jacobi-Matrix. Um diese zu bestimmen, lösen wir die erste Gleichung nach x auf und erhalten:

$$x = -3 \cdot y - 45$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$3 \cdot y^2 + 6 \cdot (-3 \cdot y - 45) - 3 = 0$$

vereinfacht

$$y^2 - 6 \cdot y - 91 = 0.$$

Die Lösung mit quadratischer Ergänzung oder "p, q-Formel" ergibt:

$$y_1 = -7 \qquad y_2 = 13.$$

und daher

$$x_1 = -24 \qquad x_2 = -84.$$

Die Hesse-Matrix an den entsprechenden Punkten ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -42 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 78 \end{pmatrix}$$

Die zweite Matrix erfüllt das Kriterium für Positiv-Definitheit, da

$$2 > 0 \qquad 2 \cdot 78 - 36 > 0$$

Der Punkt (x_2, y_2) ist also ein lokales Minimum.

Die erste Matrix erfüllt das Kriterium nicht, da

$$2 \cdot (-42) - 36 < 0.$$

Auch ihr Negatives erfüllt das Kriterium nicht. Der Punkt (x_1, y_1) ist also ein Sattelpunkt.

12. Zunächst bilden wir wieder die Jacobi-Matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) & \frac{d}{dy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x), -\sin(y) \end{pmatrix}$$

Am Punkt $x = 0, y = 0$ ist dies gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein Vektor der Länge 1 in Richtung φ ist durch

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Richtungsableitung berechnet sich also als

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \cos(\varphi).$$