Abgabe: Bis spätestens Mittwoch, 25.10.2017 um 10:00 Uhr. (Die Abgabekästen stehen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Geb. 51). Bitte maximal zu zweit abgeben und Namen und Übungsgruppe deutlich auf die Lösungen schreiben.

Homepage: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hoermann/m1i2017/`

Aufgabe 1: (Aussagenlogik) (2+2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien sind:

(a) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(b) $(A \wedge (B \vee C)) \iff ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

Aufgabe 2: (Mengen und Abbildungen) (2+2+2 Punkte)
Sei $f : M \to N$ eine Abbildung von Mengen, und seien $A, B \subseteq M$ Teilmengen von M. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
(b) $f(A^\complement) \subseteq f(A)^\complement$.
(c) $f(A^\complement) \supseteq f(A)^\complement$.

Aufgabe 3: (2+3 Punkte)

(a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Zeigen Sie, daß es genau dann eine bijektive Abbildung $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ gibt, wenn $n = m$ ist.
(b) Sind die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv?
  (1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = 100 - z$,
  (2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = z^2$,
  (3) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = z^3$,
  (4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z & \text{falls } z \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(z-1) & \text{falls } z \text{ ungerade,} \end{cases}$
  (5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(z) = z^3$,
  (6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$.

Aufgabe 4: (2+2+2 Punkte) Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.
(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
(c) Sind f und $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

Hier bedeutet $g \circ f$ die Hintereinanderausführung von Abbildungen; es wird zuerst f und dann g angewendet. Die scheinbar umgekehrte Schreibweise kommt von der definierenden Formel $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Zusatz: Formulieren Sie für die richtigen Aussagen oben Analoga für "surjektiv".

Viel Erfolg!