Übungsblatt 3 zur Mathematik 1 WS 17/18
Dr. M. Wendt, Dr. F. Hörmann 2. November 2017

Abgabe: Bis spätestens Donnerstag, 9.11.2017 um 10:00 Uhr. (Die Abgabekästen stehen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Geb. 51). Bitte maximal zu zweit abgeben und Namen und Übungsgruppe deutlich auf die Lösungen schreiben.

Homepage: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hoermann/m1i2017/`

Aufgabe 1: (2 + 2 Punkte)
Bestimmen Sie (mit Begründung) die größte untere Schranke für jede der folgenden Mengen:

(a) $M_1 = \left\{\frac{(-1)^n}{n} + 10 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
(b) $M_2 = \left\{1 + (-1)^n + \frac{1}{n^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)
Gegeben seien die folgenden Intervalle

$$I_1 = [3,6], I_2 = (0,10), I_3 = [4,7], I_4 = (-\infty, 5].$$

Berechnen Sie

(a) $I_1 \cap (I_2 \setminus I_3)$.
(b) $I_4 \cap (I_1^{\complement} \cup I_3^{\complement})$.

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)
Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gelten

(1) Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$,
(2) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Leiten Sie (1) aus (2) her und umgekehrt. Tipp: Beweisen und verwenden Sie die Formel

$$2\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit $|v_1| = |v_2| = |v_3| = 1$ und

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

gegeben. Zeigen Sie, dass je zwei der Vektoren einen Winkel von $\frac{2\pi}{3}$ einschließen.

Aufgabe 5: (2+2 Punkte)

(a) Gegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Winkel, der zwischen diesen Vektoren eingeschlossen wird.

(b) Gegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, welches von v_1 und v_2 eingeschlossen wird.

Viel Erfolg!