

Abgabe: Bis spätestens Donnerstag, 16.11.2017 um 10:00 Uhr. (Die Abgabekästen stehen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Geb. 51). Bitte maximal zu zweit abgeben und Namen und Übungsgruppe deutlich auf die Lösungen schreiben.

Homepage: <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hoermann/m1i2017/>

Aufgabe 1: (Komplexe Zahlen) (2+2+2 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie Betrag und Argument der komplexen Zahlen $3 - 2i$ und $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$.
- (b) Finden Sie den Fehler in der Gleichungskette $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$.
- (c) Welche komplexen Zahlen erfüllen die Bedingung $|z| = |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$?

Aufgabe 2: (quadratische Gleichungen) (3+2 Punkte)

- (a) Lösen Sie die Gleichung $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$.
- (b) Für welche komplexen Zahlen gilt $|z| \geq \frac{15}{|z-2|}$? (mit Veranschaulichung in der komplexen Ebene)

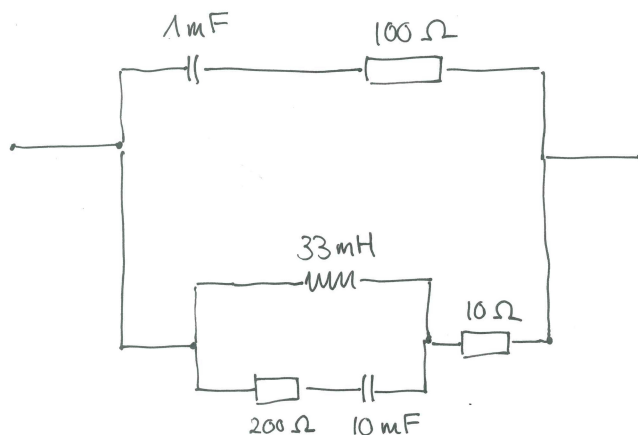
Aufgabe 3: (6 Punkte)

Komplexe Zahlen sind praktisch, um den Widerstand auszurechnen, den ein Wechselstrom (mit Frequenz f und Kreisfrequenz $\omega := 2\pi f$) erfährt, wenn er durch eine Schaltung mit (normalen) Widerständen, Spulen und Kondensatoren fließt. Man ordnet einem normalen Widerstand R den komplexen Widerstand R zu, einer Spule mit Induktivität L den komplexen Widerstand $i\omega L$ und einem Kondensator mit Kapazität C den komplexen Widerstand $\frac{-i}{\omega C}$. Für eine Reihenschaltung mit zwei Elementen mit komplexen Widerständen R_1, R_2 ergibt sich ein Gesamtwiderstand $R = R_1 + R_2$. Für eine Parallelschaltung mit zwei Elementen mit komplexen Widerständen R_1, R_2 ergibt sich der Gesamtwiderstand R über die Gleichung $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Der effektive Widerstand, den der Strom beim Durchlaufen einer Schaltung mit komplexem Widerstand R erfährt, berechnet sich als der Betrag $|R|$.

Betrachten Sie die folgende Schaltung und zeichnen Sie den effektiven Widerstand als Funktion der Frequenz im Bereich $1\text{Hz} - 10\text{Hz}$ (Sie sollten ein Computeralgebrasystem, z.B. SAGE, benutzen).

Für weitere Hinweise (z.B. für die Relationen der Einheiten F, H, Ω, Hz zueinander) suchen Sie auch im Internet.



Aufgabe 4: (3 Punkte)

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\varphi_v(x) = x - 2\langle x, v \rangle v.$$

Beschreiben Sie die Abbildung geometrisch.

Bonusaufgabe 5: (Schatzsuche) (4 Zusatzpunkte)

Auf der Insel ist ein kleiner Baum B_1 und ein großer Baum B_2 , sowie ein Kreuz X . Gehe vom Kreuz nach B_1 und noch einmal genauso lang weiter und um dieselbe Strecke nach links (90°) um die Ecke. Markiere diese Stelle M_1 . Geht man vom Baum B_2 zum Kreuz X und links um 90° dieselbe Strecke verlängert, ergibt dies einen zweiten Punkt M_2 . Der Schatz ist genau in der Mitte zwischen M_1 und M_2 vergraben.

Behauptung: Der Schatz läßt sich finden, selbst wenn das Kreuz nicht mehr vorhanden ist.

Hinweis: Benutzen Sie die komplexen Zahlen!

Viel Erfolg!