Übungsblatt 7 zur Mathematik 1 WS 17/18
Dr. M. Wendt, Dr. F. Hörmann 30. November 2017

Abgabe: Bis spätestens Donnerstag, den 7. Dezember, um 10:00 Uhr. (Die Abgabekästen stehen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Geb. 51). Bitte maximal zu zweit abgeben und Namen und Übungsgruppe deutlich auf die Lösungen schreiben.

Homepage: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hoermann/m1i2017/`

Aufgabe 1: (2+2 Punkte) Bestimmen Sie, mit Begründung, ob die folgenden Folgen komplexer Zahlen

(a) $z_n = e^{2\pi(n^2+n^{-2})i}$, $n \in \mathbb{N}$,

(b) $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

einen Grenzwert besitzen. Berechnen Sie diesen, falls er existiert.

Aufgabe 2: (1 + 1 + 1 + 1 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen in z:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^n$.

Aufgabe 3: (1 + 1 + 1 + 1 Punkte) Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen f_i im Punkt x_0 stetig ergänzt werden können. In anderen Worten, entscheiden Sie (wie immer mit Begründung!), ob der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f_i(x)$ existiert. Falls ja, bestimmen Sie bitte auch den Zahlenwert.

(a) $f_1 : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3-1}{(x-1)^3}$, $x_0 = 1$.

(b) $f_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x_0 = 0$.

(c) $f_3 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$, $x_0 = 0$.

(d) $f_4 : \mathbb{R}\backslash\{5\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x > 5 \\ 3x - 8, & x < 5 \end{cases}$, $x_0 = 5$.

Aufgabe 4: (1+1+1+1 Punkte + 4 Bonuspunkte)
Die Wahrscheinlichkeit $P(n)$, dass in einem Uranstück (reines ^{238}U) von 1g Masse, in t Zeiteinheiten genau n Atome zerfallen werden, ist ungefähr durch eine Poisson-Verteilung gegeben:

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei ist $\lambda = N\mu t$ wobei $\mu = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$, $T_{1/2}$ die Halbwertszeit und N die Anzahl der Atome.

(1) Beweisen Sie, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)$$

tatsächlich 1 ist.

(2) Berechnen Sie λ unter den gegebenen Daten in Abhängigkeit von t.

(3) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(n)$ in ein Balkendiagramm für kleine n jeweils für $t = 0,1\text{ms}$, $t = 1\text{ms}$ und $t = 10\text{ms}$.

(4) Zeichnen Sie die Normalverteilung

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{(n-\lambda)^2}{2\lambda}}$$

für dieselben Werte von t. Beobachtung?

(5)** Leiten Sie die Formel für $P(n)$ her unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines einzelnen Atomes durch $1 - e^{-\mu t}$ gegeben ist. Bilden Sie die Näherung $\mu \to 0$ und $N \to \infty$ unter der Annahme, dass λ konstant bleibt.

Hinweis: ^{238}U *hat eine Halbwertszeit von 4,468 Milliarden Jahren. Ein Atom wiegt* $238u$*, wobei* $u = 1,660539 \cdot 10^{-27} kg$ *die atomare Einheit ist.*

Viel Erfolg!