Abgabe: Bis spätestens Donnerstag, den 14. Dezember, um 10:00 Uhr. (Die Abgabekästen stehen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Geb. 51). Bitte maximal zu zweit abgeben und Namen und Übungsgruppe deutlich auf die Lösungen schreiben.

Homepage: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hoermann/m1i2017/`

**Aufgabe 1:** (1+1+1+1+1+1 Punkte) Berechnen Sie die ersten Ableitungen $f' : U \to \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$, wobei $U \subset \mathbb{R}$ der maximale Definitionsbereich ist:

(a) $f_\alpha(x) = \log(\alpha \exp(x))$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
(b) $f(x) = \exp(\frac{1}{x^2+1})$,
(c) $f(x) = \frac{x^5+10x^4+3x+7}{x^7+8x^3+9}$,
(d) $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[2n]{x^{2n}+1}}$, $n \in \mathbb{N}$,
(e) $f_n(x) = \underbrace{\log(\log(\cdots\log}_{n-\text{mal}}(x)\cdots))$, $n \in \mathbb{N}$,
(f) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

**Aufgabe 2:** (3+1 Punkte) Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge, wobei die $f_n$ gleichmäßig stetige Funktionen sind. Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion gleichmäßig stetig ist. Geben Sie ein Beispiel, dass die gleichmäßige Konvergenz eine notwendige Voraussetzung ist.

**Aufgabe 3:** (3+1 Punkte)

(1) Eine Konservendose mit 850ml Inhalt soll so gebaut werden, dass der Blechverbrauch minimal ist. Wir vernachlässigen Materialstärke und Falznähte und nehmen an, dasss es sich bei der Dose um einen einfachen Zylinder mit Radius $r$ und Höhe $h$ handelt. Welchen Radius und welche Höhe hat die optimale Dose? Vergleichen Sie Ihre gefundenen Werte mit den Maßen einer Dose aus dem Supermarkt.
*Hinweis: Es ist sinnvoll, zunächst Funktionen aufzustellen, die das Volumen und den Blechverbrauch für gegebenen Radius und Höhe beschreiben. Da das Volumen konstant sein soll, können Sie jetzt die Höhe als Funktion des Radius beschreiben.*

(2) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 e^x - 2xe^x - \frac{1}{3}x^3 + 2x + 5.$$

**Aufgabe 4:** (4 Punkte) Das PLANCKsche Strahlungsgesetz beschreibt die Energieverteilung der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers in Abhängigkeit von der Wellenlänge $\lambda$:

$$\frac{k_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{k_2}{\lambda}} - 1}.$$

Hierbei sind verschiedene für die Betrachtung nicht relevante Größen zu Konstanten $k_1, k_2$ zusammengefaßt. Bestimmen Sie den Grenzwert für $\lambda \to 0$.

**Aufgabe 5:** (2 Punkte) Der Radius einer Kugel wird mit einer Genauigkeit von 1% bestimmt. Schätzen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung den relativen Fehler bei der Berechnung des Kugelvolumens ab.

Viel Erfolg!