Abgabe: Bis spätestens Donnerstag, den 21. Dezember, um 10:00 Uhr. (Die Abgabekästen stehen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Geb. 51). Bitte maximal zu zweit abgeben und Namen und Übungsgruppe deutlich auf die Lösungen schreiben.

Homepage: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hoermann/m1i2017/`

Aufgabe 1: (Newton-Verfahren) (8 Punkte) Benutzen Sie das Newton-Verfahren, um $\log(2)$ auf 4 Nachkommastellen genau zu berechnen.
Hinweis: Bestimmen Sie die Nullstelle von $\mathrm{e}^x - 2$ *mit dem Verfahren aus der Vorlesung. Überprüfen Sie die Voraussetzungen des* BANACH*schen Fixpunktsatzes für die Hilfsfunktion! Als linker Intervallrand und Startwert kann* $\frac{1}{2}$ *benutzt werden (warum?). Wie genau ist der Wert tatsächlich, wenn das Verfahren abbricht? Für die Berechnung von Werten der e-Funktion kann Taschenrechner/Computeralgebrasystem benutzt werden; diskutieren Sie, welche Genauigkeit für diese Berechnungen notwendig ist (und wo das eingeht).*

Aufgabe 2: (2 Punkte) Die hyperbolische Kosinusfunktion ist gegeben durch $\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + y_0$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$(y - y_0)y'' - (y')^2 = 1$$

Aufgabe 3: (Integralrechnung) (4+1+1+4 Punkte)

(1) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Für eine natürliche Zahl n betrachten wir die Zerlegung $Z_n = \left(\frac{0}{n}a, \frac{1}{n}a, \ldots, \frac{n}{n}a\right)$ des Intervalls $[0, a]$. Zeigen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, dass die Ober- und Untersummen gegen den gemeinsamen Grenzwert $\frac{a^3}{3}$ konvergieren.

(2) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$\int_1^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x}\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x.$$

(3) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $y = x^3 - x$, $x = -2$, $x = 2$ und $y = 0$ begrenzt wird.

Viel Erfolg!