Abgabe: Bis spätestens Donnerstag, den 1. Februar, um 10:00 Uhr. (Die Abgabekästen stehen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Geb. 51). Bitte maximal zu zweit abgeben und Namen und Übungsgruppe deutlich auf die Lösungen schreiben.

Homepage: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hoermann/m1i2017/`

Aufgabe 1: (2 + 2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(x,0)$ vom Grad 3 mit Entwicklungspunkt $a = 0$ von der Funktion $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_4(x,\pi)$ vom Grad 4 mit Entwicklungspunkt $a = \pi$ von der Funktion $f(x) = \tan(x)$.

Aufgabe 2: (2 + 2 Punkte) Wir betrachten die Funktion $\tilde{f} : (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, welche 2π-periodisch zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird, d.h.

$$f(x) = x - 2k\pi, \quad \text{falls} \quad (2k-1)\pi < x \leq (2k+1)\pi.$$

(a) Bestimmen Sie die Fourierentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$ von f.

(b) Zeichnen Sie die Graphen der zugehörigen Fourierpolynome $(S_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n}(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$ für die Werte $n = 2, 5, 10$, ebenso wie den Graphen von f.

Hinweis: Für (b) dürfen Sie ein beliebiges Computeralgebraprogramm verwenden.

Aufgabe 3: (3 + 1 Punkte) Wir betrachten die Funktion $\tilde{f} : (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, welche 2π-periodisch zu einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird.

(a) Bestimmen Sie die Fourierentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$ von f.

(b) Begründen Sie, dass folgender Grenzwert existiert und berechnen Sie ihn:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Viel Erfolg!