Keine Abgabe.

Homepage: `http://home.mathematik.uni-freiburg.de/hoermann/m1i2017/`

Aufgabe 1:
Die positive Zahl g, welche $g = 1 + \frac{1}{g}$ erfüllt, heißt goldener Schnitt.

a) Bestimmen Sie g.
b) Es sei $(x_n)_{n\geq 0}$ die Folge $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Zeigen Sie, dass

$$|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}$$

gilt. *Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion.*
c) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen g konvergiert.

Aufgabe 2:
Existieren die folgenden Grenzwerte? Wenn ja, berechnen Sie diese.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\cdot\tan(x)} \qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{6n^4+2n+1}{(3n^2-1)^2} \qquad (c)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\ln n}.$$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie den folgenden Grenzwert in Abhängigkeit von $y \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} \binom{x}{100} (e^{y/x} - 1)^{100}.$$

Aufgabe 4:
Erklären Sie die Bedeutung:

> I don't know half of you half as well as I should like; and I like less than half of you half as well as you deserve.

Aufgabe 5:
Beweisen Sie die folgende Aussage: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Aufgabe 6:
Berechnen Sie für die folgenden komplexen Zahlen den Betrag, die konjugiert komplexe Zahl und die Polardarstellung:

(a) $z_1 = -3$.
(b) $z_2 = -1 + \mathrm{i}$.
(c) $z_3 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.
(d) $z_4 = \sqrt{2} + 1 - \mathrm{i}$.

Aufgabe 7:
Zerlegen Sie die folgenden komplexen Polynome in Linearfaktoren (über $\mathbb{C}$):
(a) $p(z) = z^5 - 3z^3 - z^2 + 3$.
(b) $q(z) = z^4 + 2iz^2 + 3$.

Aufgabe 8:
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
(a) $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.
(b) $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.
Hinweis: Man betrachte die linke Seite als Realteil einer bestimmten komplexen Exponentialfunktion.

Aufgabe 9:
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, das Integral $\int_0^a f(x)dx$ nur mit Hilfe der Definition, also als Grenzwert Riemannscher Summen, zu berechnen.
(a) Zeigen Sie, dass für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die folgende Gleichung gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(b) Gegeben eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, betrachten Sie die Zerlegung $Z_n = (\frac{0}{n}a, \frac{1}{n}a, \frac{2}{n}a, \ldots, \frac{n}{n}a)$. Berechnen Sie die Riemannsche Summe $S_{Z_n}(f)$, prüfen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_{Z_n}(f)$ existiert und bestimmen Sie den Grenzwert gegebenenfalls.

Aufgabe 10:
(a) Zeigen Sie, dass das NEWTON-Verfahren für $f(x) = x^2 - 2$ für alle $x_0 \neq 0$ gegen eine Nullstelle konvergiert.
(b) Finden Sie eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, an der das NEWTON-Verfahren für $f(x) = x^3 - 5x$ nicht konvergiert. *Mit Begründung.*

Aufgabe 11: Differenzieren Sie, nur mit Hilfe der in der Vorlesung besprochenen Ableitungen und Ableitungsregeln die folgenden Funktionen.
(a) $f_2(x) = \arcsin(x)$.
Hinweis: Diskutieren Sie die Funktion $\sin(\arcsin x)$ *oder* $\arcsin(\sin x)$.
(Achtung! Was ist der jeweilige Definitionsbereich?). Irgendwann treffen Sie vermutlich auf die Funktion $\cos(\arcsin x)$. *Um diese Funktion zu vereinfachen, erinnern Sie sich an die Tatsache, dass für jede Zahl* y *gilt, dass* $\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$ *ist. Was passiert, wenn ich* $y = \arcsin x$ *wähle? In der richtigen Lösung, die Sie auch in jeder Formelsammlung finden, tauchen keine trigonometrischen Funktionen mehr auf.*

(b) $f_3(x) = e^x \cdot \ln(x^5)$.

(c) $f_4(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$.

Viel Erfolg!