Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2012
Übungsblatt 1

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Der abstrakte Funktionsbegriff.** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion (Abbildung) zwischen beliebigen Mengen. Erinnere die folgenden Definitionen:

   - f heisst **injektiv**, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt, dass $x_1 = x_2$. Mit anderen Worten: Jedes Element aus Y hat höchstens ein Urbild unter f.
   - f heisst **surjektiv**, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$. Mit anderen Worten: Jedes Element aus Y hat mindestens ein Urbild unter f.
   - f heisst **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist. Mit anderen Worten: Jedes Element aus Y hat genau ein Urbild unter f.

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = 100 - z$,
   (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = z^2$,
   (c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = z^3$,
   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, gegeben durch $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z & \text{falls } z \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(z-1) & \text{falls } z \text{ ungerade,} \end{cases}$
   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(z) = z^3$,
   (f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$.

   Zusatzfrage: Sei X eine endliche Menge. Kann es eine Funktion $f : X \to X$ geben, die injektiv, aber nicht surjektiv ist?

2. **Injektive Abbildungen.** Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:

   (a) Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.
   (b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
   (c) Sind f und $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

   Hier bedeutet $g \circ f$ die Hintereinanderausführung von Funktionen; es wird zuerst f und dann g angewendet. Die scheinbar umgekehrte Schreibweise kommt von der definierenden Formel $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

   Zusatz: Formulieren Sie für die richtigen Aussagen oben Analoga für "surjektiv".

3. **Induktionsbeweis.** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bitte wenden!

4. **Mengenoperationen.** Sei X eine Menge, A, B, $C \subset X$ Teilmengen und bezeichne $(\cdot)^c$ das Komplement einer Teilmenge, also z.B. $A^c = X \setminus A$. Zeigen Sie:

   (a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Gesetz von de Morgan)

   (b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

   Hinweis: Für Aufgabenteil (b) können Sie Aufgabenteil (a) und $A \setminus B = A \cap B^c$ benutzen.

Abgabe am 30.4.2012 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung