Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2012
Übungsblatt 12

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Totale Differenzierbarkeit I.** Berechnen Sie die totale Ableitung (Jacobi-Matrix) der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von x und y:
   (a) $f(x, y) = \sin(x) \cdot y + \cos(y) \cdot x$.
   (b) $f(x, y) = (x + y)^3$.
   (c) $f(x, y) = \frac{1+x+y}{x^2+y^2+1}$.
   (d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

2. **Totale Differenzierbarkeit II.** Berechnen Sie die totale Ableitung (Jacobi-Matrix) der folgenden Funktion
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(z) & -\sin(z) \\ \sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
in Abhängigkeit von x, y und z.

3. **Partielle Differenzierbarkeit impliziert nicht die totale Differenzierbarkeit.** Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Beispiel aus der Vorlesung)
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2+y^2} & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{falls } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$
sogar partiell differenzierbar nach x und y in jedem Punkt ist.
Wie wir gesehen haben, ist f allerdings *nicht einmal stetig* in 0 und deshalb auch nicht total differenzierbar. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen (in jedem Punkt) und beweisen Sie, dass sie nicht stetig in 0 sind.

4. **Hesse-Matrix.** Berechnen Sie die totale Ableitung und die Hesse-Matrix der Funktion
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
die durch
   (a) $f(v) = \frac{1}{|v|+\varepsilon}$ für eine Konstante $\varepsilon > 0$,
   (b) $f(v) = \exp(|v|^2)$,

   gegeben ist (an jedem Punkt). Hier ist $|v| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$ der n-dimensionale Betrag.

Abgabe am 23.7.2012 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung