Dr. Markus Junker — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2012
Übungsblatt 2

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Das Yoga der Ringaxiome.** Beweisen Sie (nur unter Benutzung der in der Vorlesung angegebenen Axiome), dass in jedem Ring gilt:

$$r \cdot (-s) = -(r \cdot s) = (-r) \cdot s,$$
$$(-r) \cdot (-s) = r \cdot s.$$

2. **Untervektorräume.** Sei V ein k-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heisst **k-Untervektorraum** (auch k-Unterraum), falls $0 \in U$ und sich die Abbildungen $\cdot : k \times V \to V$ und $+ : V \times V \to V$ auf U einschränken lassen. Man kann zeigen, dass U in diesem Fall wirklich ein k-Vektorraum ist, und somit diese Bezeichnung sinnvoll ist.

   Bestimmen Sie, welche der folgenden Teilmengen ein $\mathbb{R}$-Unterverktorraum des $\mathbb{R}^3$ ist:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$,

   (b) $\left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$,

   (c) $T_1 := \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$,

   (d) $T_2 := \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$,

   (e) $T_1 \cap T_2$,

   (f) $T_1 \cup T_2$.

3. **Der Körper $\mathbb{F}_3$.** Auf der Menge $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ kann die Struktur eines Körpers definiert werden. Finden Sie diese, und geben Sie die Verknüpfungen in Tabellenform an:

+	0	1	2
0			
1			
2			

·	0	1	2
0			
1			
2			

   Hinweis: Denken Sie für die additive Struktur an die "Uhr" aus der Vorlesung.

   Zusatz: Können Sie formal *begründen, warum z.B. das Distributivgesetz wirklich gilt? Beachten Sie: Um dies aus den Tabellen oben abzulesen, müsste man $3^3 = 27$ Überprüfungen machen.*

Bitte wenden!

4. **Lineare Unabhängigkeit:** Sei V ein k-Vektorraum. Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heissen **linear abhängig**, falls Koeffizienten (also Elemente) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aus k existieren, die nicht alle 0 sind, so dass

   $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

   Falls solche Koeffizienten nicht existieren, also falls aus einer solchen Gleichung folgt, dass $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ sein muss, heissen die Vektoren **linear unabhängig**.

   Beweisen Sie durch Angabe einer geeigneten Linearkombination, dass die Vektoren

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \\ 26 \end{pmatrix}$$

   im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Abgabe am 7.5.2012 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung