Kapitel I LINEARE ALGEBRA

§1 Grundlegende algebraische Strukturen

1) (das) Monoïd besteht aus
- einer nicht-leeren Menge M
- einer zweistelligen Verknüpfung $\circ$ auf M

(d.h. $\circ : M \times M \to M$ Abbildung, d.h. zu jedem $m_1, m_2 \in M$ existiert $m_1 \circ m_2 \in M$)

mit folgenden Eigenschaften:

$\circ$ ist assoziativ und besitzt ein neutrales Element e
(d.h. für alle $m \in M$ gilt $e \circ m = m \circ e = m$)

<u>Bem:</u> e ist eindeutig bestimmt

<u>Notation</u> $(M, \circ, e)$ oder $(M, \circ)$

Beispiele:

- $(\mathbb{N}, +, 0)$ $\qquad$ $(\mathbb{N}\setminus\{0\}, +)$ ist kein Monoid
- $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$
- $(\mathbb{N}\setminus\{0\}, \cdot, 1)$
- $(\mathrm{Abb}(A,A), \circ, \mathrm{id})$ $\qquad$ A Menge
- $(A^*, {}^\frown, \lambda)$

Gegenbeispiel: $\mathbb{N}$ $\quad (x,y) \mapsto x^y$ nicht assoziativ

triviales Monoid $(\{e\}, \circ)$ $\qquad e \circ e = e$

ist auch Gruppe

rechtsneutrales Element 1: $n^1 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

kein linksneutrales Element: $x^n = n$ $\quad x = \sqrt[n]{n}$

liegt nicht in $\mathbb{N}$

verschieden für verschiedene n

---

2) Gruppe besteht aus

- nicht-leerer Menge G
- zweistellige Verknüpfung $\circ$ auf G

mit:

- $\circ$ ist assoziativ
- es gibt ein neutrales Element e
- jedes Element $g \in G$ hat ein Inverses

G heißt kommutative Gruppe oder abelsche Gruppe, falls $\circ$ auch kommutativ ist.

Bem Erinnerung: h ist inverses Element zu g, falls $h \circ g = g \circ h = e$

Inverse sind eindeutig bestimmt:

Bew: Falls h_1, h_2 Inverse zu g sind, so

$$h_1 = h_1 \circ e = h_1 \circ (g \circ h_2) = (h_1 \circ g) \circ h_2 = e \circ h_2 = h_2$$

Notation: man schreibt g^{-1} für das Inverse von g

3 gebräuchliche Notationen für Gruppen:

allgemein $(G, \circ, e, {}^{-1})$

additiv $(G, +, 0, -)$ nur für komm. Gruppen üblich

multiplikativ $(G, \cdot, 1, {}^{-1})$

Jede Gruppe ist auch ein Monoid!

Bsp: für Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$
- $(\mathbb{Q}, +, 0, -)$
- $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot, 1, ^{-1})$
- $(\mathbb{Q}^{>0}, \cdot, 1, ^{-1})$

auch mit $\mathbb{R}$ (für alle vier Beispiele)

auch mit $\mathbb{C}$ (für die ersten drei Beispiele)

- symmetrische Gruppe
  $(\mathrm{Sym}(A), \circ, \mathrm{id}, ^{-1})$
  bijektive Abbildungen $A \to A$
- Struktur $\mathcal{M}$, Automorphismen
  strukturerhaltende Bijektionen
  $(\mathrm{Aut}(A), \circ, \mathrm{id}, ^{-1})$

Bsp: für Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$
- $(\mathbb{Q}, +, 0, -)$
- $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot, 1, {}^{-1})$
- $(\mathbb{Q}^{>0}, \cdot, 1, {}^{-1})$

auch mit $\mathbb{R}$ (alle vier Beispiele)

auch mit $\mathbb{C}$ (die ersten drei Beispiele)

- symmetrische Gruppe
  $(\mathrm{Sym}(A), \circ, \mathrm{id}, {}^{-1})$
  $\mathrm{Sym}(A)$: bijektive Abbildungen $A \to A$
- Struktur $\mathcal{M}$, Automorphismen
  strukturerhaltende Bijektionen
  $(\mathrm{Aut}(A), \circ, \mathrm{id}, {}^{-1})$

- $(\mathbb{Z}_{12}, +\bmod 12, 0, -\bmod 12)$

$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$

$x \text{ „}+\bmod 12\text{“ } y = \text{Rest von } \underbrace{x+y}_{\text{in } \mathbb{Z}}$ bei der Division durch 12

- $(\mathbb{Z}_2, +\bmod 2)$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

0 = gerade

1 = ungerade

3) Ring (mit Eins)

- nicht leere Menge R
- zwei zweistellige Verknüpfungen auf R:
  Addition $+$, Multiplikation $\cdot$
- Elemente 0 und 1 in R

mit folgenden Eigenschaften:

- $(R, +, 0)$ kommutative Gruppe
- $(R, \cdot, 1)$ Monoid
- es gelten die Distributivgesetze

$$r \cdot (s_1 + s_2) = (r \cdot s_1) + (r \cdot s_2)$$
$$(s_1 + s_2) \cdot r = (s_1 \cdot r) + (s_2 \cdot r)$$

man führt die üblichen Regeln ein:

Punkt vor Strich

Multiplikationspunkt kann weggelassen werden, z.B.

$$r(s_1 + s_2) = rs_1 + rs_2$$

R heißt kommutativer Ring, falls $\cdot$ kommutativ ist.

Bem: $r \cdot 0 = r \cdot (0+0) = r \cdot 0 + r \cdot 0$

$r \in R$ Also $0 = r \cdot 0 + (-r \cdot 0) = r \cdot 0 + \underbrace{r \cdot 0 + (-r \cdot 0)}_{=0} = r \cdot 0$

ebenso $0 \cdot r = 0$

Ähnlich $r \cdot (-s) = -(r \cdot s) = (-r) \cdot s$

$(-r) \cdot (-s) = r \cdot s$

Bsp:

- trivialer Ring $\{0\}$

  Falls $0 = 1$, dann $r = r \cdot 1 = r \cdot 0 = 0$

  In allen anderen Ringen gilt $0 \neq 1$!

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, ebenso $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- $(\mathbb{Z}_{12}, + \bmod 12, \cdot \bmod 12)$
- Polynomring $\mathbb{R}[X]$ die Menge der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$
- Potenzreihenring $\mathbb{R}[[X]]$

4) Körper K besteht aus

- nicht-leere Menge K
- zwei zweistellige Operationen auf K: Addition $+$, Multiplikation $\cdot$
- zwei Elemente $0 \neq 1$

mit

$(K, +, 0)$, $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sind komm Gruppen

- es gilt das Distributivgesetz

Bsp.: · $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

· $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1