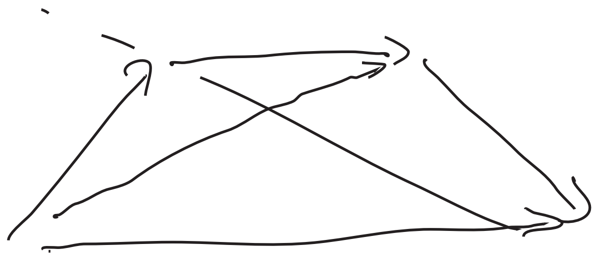
§2 Vektorräume

Bsp „Pfeile in der Ebene" (gerichtete Strecken)

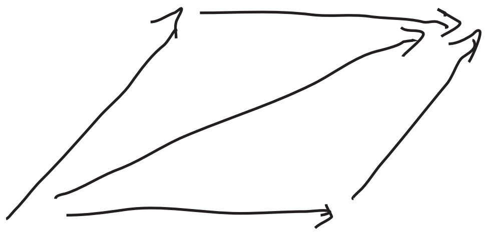
zweistellige Verknüpfung: Hintereinandersetzen + „Abkürzen"

„Addition"

assoziativ? ✓



kommutativ? ✓

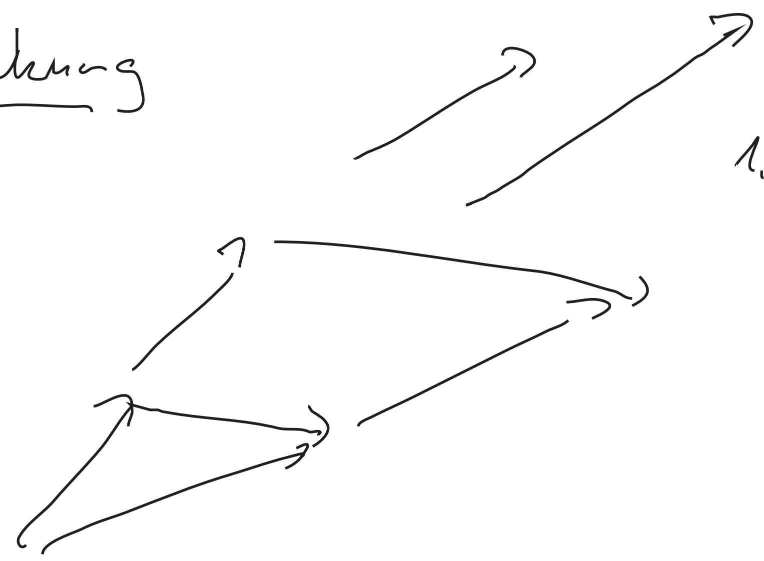


Pfeile mit Addition bilden komm. Gruppe!

neutrales Element? ✓ Strecke der Länge 0, ohne Richtung

inverse Elemente? ✓ Pfeil in umgekehrte Richtung

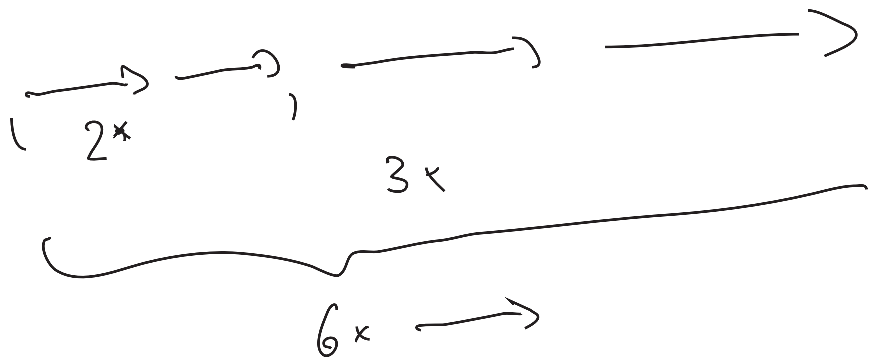
Streckung

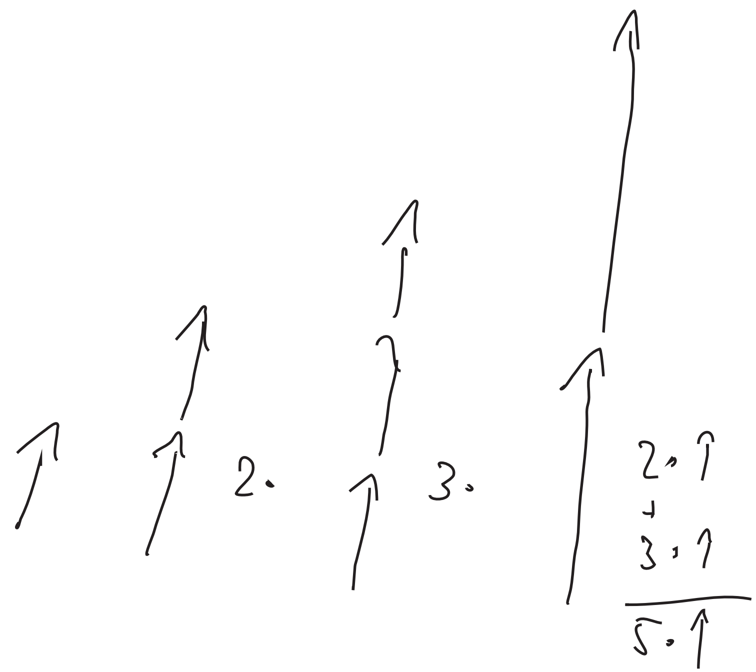


1,7 ·

Skalierungsfaktor:
positive reelle Zahlen
negative Zahlen: Richtung herumdrehen

Summe von gestreckten Pfeilen
= Streckung der Summe
(gleicher Streckfaktor!)





Def: Sei K ein Körper (z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2$)

V heißt <u>K-Vektorraum</u> (oder kurz: „Vektorraum", falls aus dem Kontext klar ist, was K ist)

falls es eine zweistellige innere Verknüpfung $+$ auf V gibt („Addition") und eine äußere Verknüpfung $K \times V \to V$ („Skalarmultiplikation")

$$(k, v) \mapsto k \cdot v = kv$$

mit folgenden Eigenschaften:

$(V, +)$ ist kommutative Gruppe mit neutralem Element $0 = 0_V$ und Inversen $-v$ zu v

und

- $1 \cdot v = v$
- $(k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$
  $(k_1 \cdot k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 \cdot v)$
- $k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2$

für alle $k, k_1, k_2 \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$

Elemente aus V heißen Vektoren, Elemente aus K Skalare

Es gibt das neutrale Element in $(V,+)$ und die Null im Körper K, beide werden 0 geschrieben bzw. zur Verdeutlichung 0_V und 0_K.

<u>Bem:</u> (ähnlich wie bei Ringen, vgl. Übungsblatt 2) Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ k \cdot 0_V = 0_V \\ \cdot\ 0_K \cdot v = 0_V \\ \cdot\ k\cdot(-v) = (-k)\cdot v = -(k\cdot v) \end{array}\right\} \text{für alle } k \in K,\ v \in V$$

<u>Bsp:</u>

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \text{Pfeile in der Ebene} \\ \ \text{Pfeile im Raum} \end{array}\right\} \mathbb{R}\text{-Vektorräume}$$

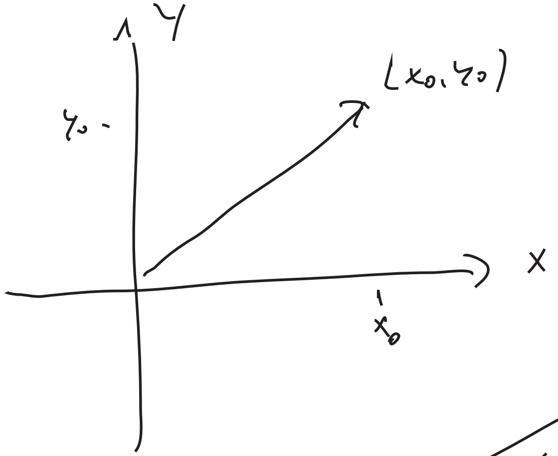
- $\mathbb{R}^2$: als Zeilenvektoren (x,y)
  als Spaltenvektoren $\binom{x}{y}$

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$
$$r\cdot(x,y) = (r\cdot x,\ r\cdot y)$$

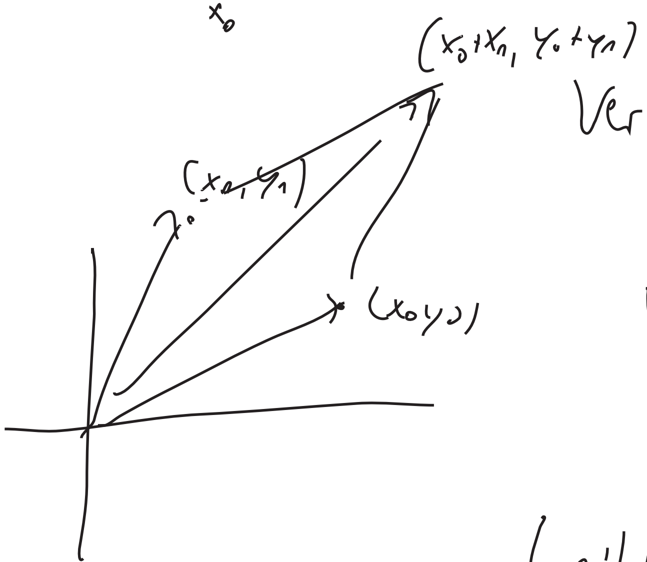
koordinatenweise Operationen

alle Axiome gelten (nachprüfen!)
neutrales Element und inverse Elemente findet man komponentenweise,
d.h. $(0,0)$ ist neutrales Element und $(-x,-y)$ invers zu (x,y).

verschiedene Möglichkeiten, von „Pfeilen in der Ebene" zu $\mathbb{R}^2$ zu kommen



gegeben zwei Koordinatenachsen,
kann man jedem Punkt (x_0,y_0) den Pfeil
von $(0,0)$ nach (x_0,y_0) zuordnen



Verträglich mit Addition und Skalarmultiplikation.

Umgekehrt: viele Möglichkeiten,
Koordinatenachsen festzulegen!

Leitfragen der Linearen Algebra:
Wie funktioniert der Übergang von einem
Koordinatensystem zu einem anderen?

- $\mathbb{R}^3$ (x, y, z) bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit koordinatenweisen Operationen

- $\mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bzw. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – " –

- $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$

  $\mathbb{R}$ – Folgen

- $\mathbb{R}[X]$ Polynome über $\mathbb{R}$

  $$\sum_{i=0}^{n} r_i X^i : \quad r \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} r_i X^i \right) = \sum_{i=0}^{n} (r \cdot r_i) X^i$$

  übliche Addition

$\mathbb{R}$ – VR

- $\mathbb{F}_2^n$ $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ mit $x_i \in \{0, 1\}$

  $n=4$: $(1, 1, 0, 1) + (0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1)$

  $0 \cdot (1, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$

  $1 \cdot (1, 1, 0, 1) = (1, 1, 0, 1)$

- $\mathbb{F}_2$ – Folgen

$\mathbb{F}_2$ – VR

- $\mathbb{C}$ ist sowohl $\mathbb{C}$-VR als auch $\mathbb{R}$-VR

Multiplikation zweier komplexer Zahlen möglich

nur Multiplikation einer reellen Zahl mit einer komplexen Zahl

§ 3 Untervektorräume und Erzeugende

Sei stets in §3 V ein K-Vektorraum

<u>Def:</u> $U \subseteq V$ heißt K-Untervektorraum (bzw. Untervektorraum, falls K fest ist)

falls ~~$U \neq \emptyset$ und~~ U unter den eingeschränkten Operationen selbst ein K-Vektorraum ist, d.h.

$U \neq \emptyset$ und für $u, u_1, u_2 \in U$, $k \in K$ gilt

$$u_1 + u_2 \in U, \quad -u \in U, \quad k \cdot u \in U$$

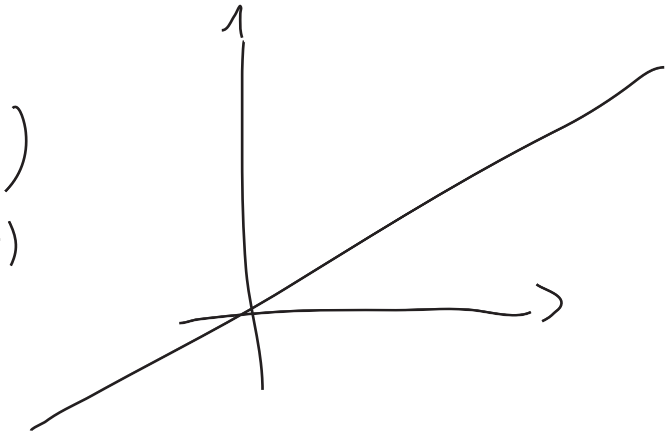
Man schreibt: $U \leq V$

<u>Bem:</u>
- Da $-u = (-1) \cdot u$, folgt die Abgeschlossenheit bzgl. „$-$" aus den anderen beiden Bedingungen
- Es gibt $u_0 \in U$, da $U \neq \emptyset$. Dann $0 = u_0 + (-u_0) \in U$.
$= 0 \cdot u_0$

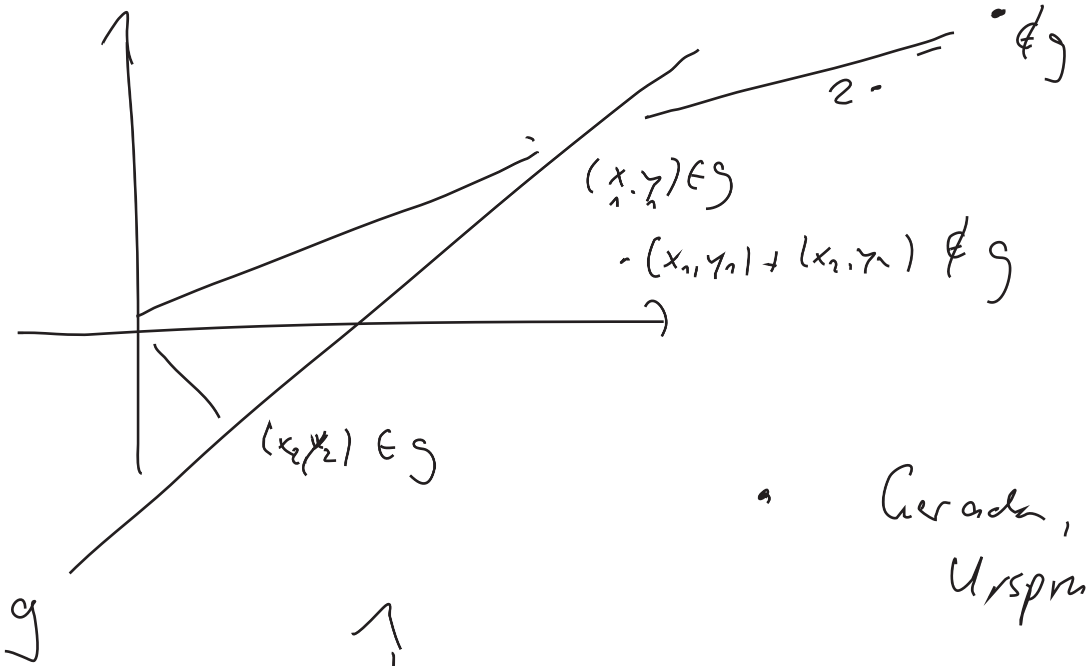
Bsp: $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$

Unterräume sind: $\{0\}$ („trivialer Unterraum")

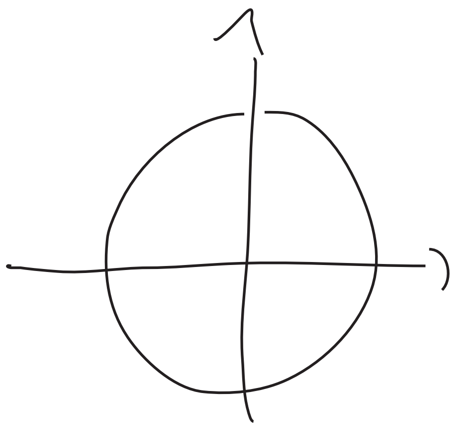
(keine weiteren) Geraden durch den Ursprung $(0,0)$



$\mathbb{R}^2$



- Geraden, die nicht durch den Ursprung gehen, sind keine Unterräume



- Kreis um $(0,0)$ ist kein Unterraum

$\mathbb{R}^2$ Gerade $= \{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$ a fest

$(x_0, ax_0) + (x_1, ax_1) = (x_0 + x_1, ax_0 + ax_1) = (x_0 + x_1, a(x_0 + x_1))$

$r \cdot (x, ax) = (rx, r \cdot ax) = (rx, a \cdot (rx))$

„Pfeile": alle Pfeile, die in feste Richtung zeigen, bilden einen Untervektorraum

---

Bem: Der Schnitt von Untervektorräumen ist wieder ein Untervektorraum.

Def: Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Der von <u>$v_1, \dots, v_n$ erzeugte Untervektorraum</u> $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ist

- der kleinste Untervektorraum von V, der $v_1, \dots, v_n$ enthält

bzw - der Schnitt aller UR von V, die $v_1, \dots, v_n$ enthalten

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \bigcap \{U \subseteq V \mid v_1, \dots, v_n \in U\}$$

- $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n \mid k_i \in K\}$

Bew: klar: Wenn U UR, der $v_1, \dots, v_n$ enthält,
dann ist auch $\underbrace{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n}$ $\in U$
(so ein Ausdruck heißt „Linearkombination der v_i")

Umgekehrt: $\{ k_1 v_1 + \dots + k_n v_n \mid k_i \in K \}$ ist unter Summen und Skalarmultiplikation abgeschlossen;

$$(k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) + (k_1' v_1 + \dots + k_n' v_n) = k_1 v_1 + k_1' v_1 + k_2 v_2 + k_2' v_2 + \dots + k_n v_n + k_n' v_n$$
$$= (k_1 + k_1') \cdot v_1 + \dots + (k_n + k_n') \cdot v_n$$

$$k \cdot (k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) = (k \cdot k_1) \cdot v_1 + \dots + (k k_n) \cdot v_n$$ $\blacksquare$

Spezialfall: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ $\quad$ 0 ist die „leere Summe"