$v_1, \dots, v_n \in V$ K-Vektorraum

Erzeugnis: $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \mid k_i \in K \}$

kleinster Untervektorraum, der $v_1, \dots, v_n$ enthält

bei unendlich vielen Vektoren

$v_i \in V$ für $i \in I$, I evtl. unendlich

Erzeugnis: $\langle v_i \mid i \in I \rangle$

= kleinster Untervektorraum, (der $\{v_i \mid i \in I\}$ bzw. alle v_i, $i \in I$,) enthält

$= \{ k_1 v_{i_1} + \dots + k_n v_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, k_i \in K, i_j \in I \}$

Achtung: in beliebigen Vektorräumen sind keine unendlichen Summen definiert!

Terminologie: Falls $\langle v_i \mid i \in I \rangle = V$,

dann sagt man: die v_i $(i \in I)$ erzeugen V

$\{v_i \mid i \in I\}$ ist ein Erzeugendensystem von V

bzw die v_i $(i \in I)$ sind Erzeuger von V

Bsp: $\mathbb{R}$ - Vektorraum $\mathbb{R}^2$

- $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ erzeugen $\mathbb{R}^2$

  denn für beliebiges $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ kann man

  $$(r,s) = r \cdot v_1 + s \cdot v_2$$ schreiben

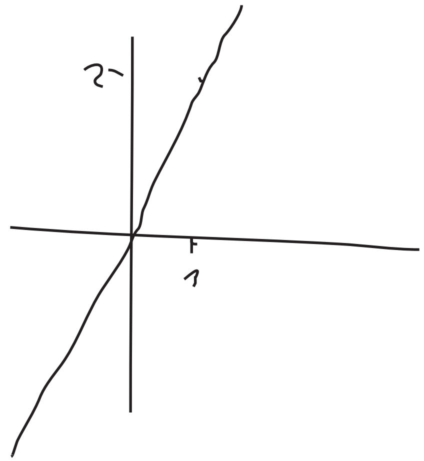
- $v_1' = (1,1)$, $v_2' = (-2,3)$ erzeugen auch $\mathbb{R}^2$

  Für beliebiges $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ gibt es $r', s' \in \mathbb{R}$ mit

  $$(r,s) = r' \cdot (1,1) + s' \cdot (-2,3)$$

$\rightsquigarrow$ Gleichungssystem
$$\begin{aligned} r &= r' - 2s' \\ s &= r' + 3s' \end{aligned}$$

- $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_1' = (1,1)$ erzeugt ebenfalls $\mathbb{R}^2$
- $v_3 = (1,2)$ erzeugt nicht $\mathbb{R}^2$, sondern echten Untervektorraum nämlich $\{ r \cdot (1,2) \mid r \in \mathbb{R} \}$

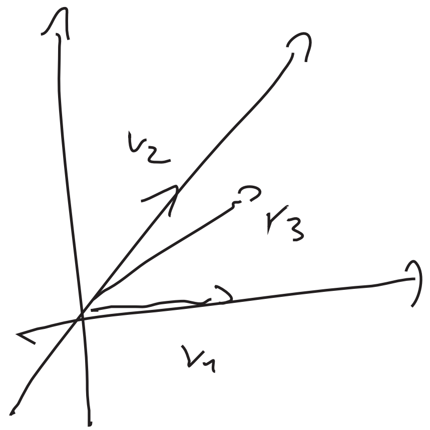


- $v_3 = (1,2)$, $v_4 = (-4,-8)$ erzeugen auch nicht $\mathbb{R}^2$
- Im $\mathbb{R}^3$:

$v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,0)$

$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$= \{ (r,s,0) \mid r,s \in \mathbb{R} \} \neq \mathbb{R}^3$



§4 Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

V ist K-Vektorraum

Def:

- v ist <u>linear unabhängig</u> von $v_1, \dots, v_n$ falls $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

  D.h. v ist linear abhängig von $v_1, \dots, v_n$, falls es $k_1, \dots, k_n \in K$ gibt mit $v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$

- $\underbrace{\{v_1, \dots, v_n\}}_{\text{alle verschieden!}}$ ist <u>linear unabhängig</u>, falls kein $v_i \in \{v_1, \dots, v_n\}$ linear abhängig von den anderen v_j's ist, d.h.

  $v_i \notin \langle \{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\} \rangle$

  unendliche Version: $\{v_i \mid i \in I\}$ ist linear unabhängig, falls für alle $j \in I$

  $v_j \notin \langle \{v_i \mid i \in I\} \setminus \{v_j\} \rangle$

(<u>Achtung</u>: die Schreibweise $v_j \notin \langle v_i \mid i \in I \setminus \{j\} \rangle$ sagt evtl. etwas anderes aus, falls nämlich $v_j = v_{i_0}$ für ein $i_0 \neq j$)

$\underbrace{\{v_1, \ldots, v_n\}}_{\text{alle verschieden}}$ ist genau linear unabhängig, wenn folgende Eigenschaft gilt:

falls $k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n = 0$, dann gilt $k_1 = \ldots = k_n = 0$

<u>Denn:</u> Falls $k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n = 0$, nicht alle $k_i = 0$, z.B. $k_1 \neq 0$

„$\Rightarrow$" Dann $v_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right) \cdot v_2 + \ldots + \left(-\frac{k_n}{k_1}\right) \cdot v_n \in \langle v_2, \ldots v_n \rangle$ ↯ zur lin. unabh.

„$\Leftarrow$" Falls $\{v_1, \ldots v_n\}$ nicht lin. unabh., dann ist z.B. $v_1 \in \langle v_2, \ldots v_n \rangle$,

d.h. $v_1 = k_2' v_2 + \ldots + k_n' v_n$ für geeignete $k_2', \ldots, k_n'$

d.h. $\underbrace{(-1)}_{"k_1'"} \cdot v_1 + k_2' \cdot v_2 + \ldots + k_n' v_n = 0$

nicht alle $k_i' = 0$ $\boxtimes$

<u>Bsp:</u> $\mathbb{R}^3$

- $(1,2,2)$ ist linear abhängig von $(1,0,0)$ und $(0,1,1)$
  denn $(1,2,2) = 1 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,1)$
- $\{(1,2,2), (1,0,0), (0,1,1)\}$ ist also lin. abh.
- $\{(1,2,2), (1,0,0), (0,0,1)\}$ ist lin. unabhängig

- $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,2,2)\}$

  $(1,0,0)$ ist zwar unabhängig vom Rest,
  aber die Menge ist insgesamt abhängig, denn
  $$(0,2,2) = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$$

- Spezialfall: 0_V ist von jedem anderen Vektor abhängig

  falls $M \subseteq V$, $0_V \in M$, dann ist M linear abhängig.

<u>Def</u>:
- Vektorraum V heißt <u>endlich erzeugt</u>, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt

- Eine <u>Basis</u> eines Vektorraums ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

V ist K-Vektorraum

Satz: $\{v_i \mid i \in I\}$ mit $v_i \in V$ ist Basis von V (a)

$\Leftrightarrow$ $\{v_i \mid i \in I\}$ ist maximal linear unabhängige Teilmenge von V (b)

$\Leftrightarrow$ $\{v_i \mid i \in I\}$ ist minimales Erzeugendensystem von V (c)

(maximal, minimal: bzgl. Inklusion)

Beweis Sei $B = \{v_i \mid i \in I\}$

(a) $\Rightarrow$ (b) Sei $\underbrace{B \text{ Basis}}_{\text{insb. Erzeugendensystem}}$, angenommen es existiert $v \in V \setminus B$ so, dass $B \cup \{v\}$ lin. unabh.

insb. Erzeugendensystem, also $v \in \langle B \rangle$: Widerspruch

(a) $\Rightarrow$ (c) Sei $\underbrace{B \text{ Basis}}_{\text{insb. linear unabhängig}}$, angenommen es existiert $v \in B$ so, dass $\underbrace{B \setminus \{v\} \text{ Erzeugendensystem}}_{v \in \langle B \setminus \{v\} \rangle}$

insb. linear unabhängig $\longrightarrow$ ↯ $\longleftarrow$ $v \in \langle B \setminus \{v\} \rangle$

(b) $\Rightarrow$ (a) Angenommen B ist max linear unabh Teilmenge, aber kein Erzeugendensystem

Dann existiert $v \in V \setminus \langle B \rangle$

Beh: $B \cup \{v\}$ ist linear unabh. Sei $kv + k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0$ $\quad k, k_i \in K$, $v_i \in B$

z.z: $k = k_1 = \dots = k_n = 0$. B ist lin. unabh., d.h. falls $k = 0$ sind auch $k_1 = \dots = k_n = 0$

Falls $k \neq 0$, dann $v = \left(-\frac{k_1}{k}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{k_n}{k}\right) v_n \in \langle B \rangle$ ↯ Also $B \cup \{v\}$ lin. unabh. Widerspruch zur Max.

(c) $\Rightarrow$ (a) [min Erzeugendensystem ist Basis]

ang B ist min Erzeugendensystem, keine Basis, also nicht lin. unabh.

Also existiert $v \in B$ mit $\underbrace{v \in \langle B \setminus \{v\} \rangle}_{\Downarrow}$

$$\langle B \setminus \{v\} \rangle = \langle B \rangle = V$$

Widerspruch zur Minimalität! $\square$

bessere Alternative zu (b) $\Rightarrow$ (a)

Angenommen B lin. unabh, keine Basis. Wähle $v \in V \setminus \langle B \rangle$ und zeige wie eben, dass $B \cup \{v\}$ lin. unabh.

Also ist B nicht max. lin. unabhängig

Folgerung: Endlich erzeugte Vektorräume haben Basen; jedes endliche Erzeugendensystem enthält eine Basis.

Jede linear unabhängige Teilmenge lässt sich zu einer Basis erweitern.

Gilt auch für nicht endlich erzeugte VR, ist aber nicht so einfach.

Satz (ohne Beweis)

Jeder Vektorraum besitzt Basen.
Alle Basen eines Vektorraums haben die gleiche Mächtigkeit (im endlichen Fall: gleiche Anzahl an Elementen).
Diese Mächtigkeit / Anzahl heißt Dimension des Vektorraums V (über dem Grundkörper K falls V K-Vektorraum.

Kurz: $\dim_K V$ (oder $\dim V$, falls K feststeht)

Beispiele: a) $\mathbb{R}^n = \{(r_1, \ldots, r_n) \mid r_i \in \mathbb{R}\}$

„Standardbasis"

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1,0,\ldots,0) \\ e_2 &= (0,1,0\ldots0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0,0\ldots0,1) \end{aligned}\right\} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$$

$(r_1, \ldots, r_n) = r_1 \cdot e_1 + r_2 \cdot e_2 + \ldots + r_n \cdot e_n$

$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \mathbb{R}^n$

offensichtlich: minimales Erzeugendensystem

Insbesondere: $\mathbb{R}^3$ ist 3-dimensional
$\mathbb{R}^2$ ist 2-dimensional
$\mathbb{R}^1$ ist 1-dimensional

b) $\{0\}$ ist 0-dimensionaler Vektorraum
$\mathbb{R}^0 = \{0\}$ 0-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum

Spezialfall

c) Polynome $\mathbb{R}[X] = \{ \sum_{i=0}^{n} r_i X^i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{R} \}$

Standardbasis $\{1, X, X^2, X^3, \ldots \} = \{ X^i \mid i \in \mathbb{N} \}$

unendlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum

d) $\mathbb{C}$: als $\mathbb{C}$-VR eindimensional mit Standardbasis $e_1 = 1$
als $\mathbb{R}$-VR zweidimensional mit Basis $\{1, i\}$
jede komplexe Zahl lässt sich schreiben als
$r \cdot 1 + s \cdot i$ mit $r, s \in \mathbb{R}$
$\{1, i\}$ ist offensichtlich minimales Erzeugendensystem

$\mathbb{C}^n$: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$ mit Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$
$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ mit Basis $\{(1,0,\ldots,0), (i,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1), (0,\ldots,0,i)\}$