Satz V K-Vektorraum

$\{v_i \mid i \in I\}$ Basis von V

ohne Doppelnennungen, d.h. für $i \neq j$, $i,j \in I$ ist $v_i \neq v_j$

Dann existiert eine eindeutige Darstellung (für beliebige $v \in V$)

$$v = \underbrace{\sum_{i \in I} k_i v_i}_{\text{nur endlich viele } k_i \neq 0} \quad \text{mit } k_i \in K$$

Beweis: Da Basis Erzeugendensystem, existiert so eine Darstellung.

Eindeutigkeit: Falls $v = \sum_{i \in I} k_i v_i = \sum_{i \in I} k_i' v_i$

jeweils nur endlich viele $\neq 0$

dann $0 = v - v = \sum_{i \in I} (k_i - k_i') \cdot v_i$

Da Basis linear unabhängig, muss $k_i - k_i' = 0$ gelten. □

__Idee:__ V n-dimensional, $b_1, \dots, b_n$ Basis

Abbildung $\varphi: V \longrightarrow K^n$

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i b_i \longmapsto (k_1, \dots, k_n)$$

„Koordinaten von v bzgl. der Basis"

ist bijektiv und verträglich mit Addition und Skalarmultiplikation.

d.h. z.B. für $v + w$

$v = \sum k_i b_i$

$w = \sum l_i b_i$

$$v + w = \sum k_i b_i + \sum l_i b_i = \sum (k_i + l_i) b_i$$

„Homomorphismus" d.h. $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$

§5 Lineare Abbildungen

falls K fest ist

__Def:__ V, W K-Vektorräume

a) $\varphi: V \to W$ ist eine K-lineare Abbildung (oder ein K-Vektorraumhomomorphismus), falls

– $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ „Additivität von φ"

$\varphi(0_V) = 0_W$

$\varphi(-v) = -\varphi(v)$ } folgen aus der ersten Eigenschaft! (*)

– $\varphi(k \cdot v) = k \cdot \varphi(v)$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $k \in K$

b) φ ist ein K-Vektorraumisomorphismus,
falls φ ein bijektiver K-VR-Homomorphismus
ist und die Umkehrabbildung φ^{-1} ebenfalls
ein K-VR-Homomorphismus. } folgt aus dem Rest, siehe Übung 2 Blatt 3

<u>Beweis von (*)</u>:

$\varphi(0_V) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$

$\Rightarrow 0_W = \varphi(0) + (-\varphi(0)) = \varphi(0) + \varphi(0) + (-\varphi(0)) = \varphi(0_V)$

$0 = \varphi(0) = \varphi(v + (-v)) = \varphi(v) + \varphi(-v) \xRightarrow{\text{Eind. der Inversen}} \varphi(-v) = -\varphi(v)$ $\square$

Satz: V, W K-Vektorräume
$\{v_i \mid i \in I\}$ Basis von V
w_i $(i \in I)$ beliebige Elemente aus W

Dann gibt es eine eindeutige K-lineare Abbildung $\varphi: V \to W$
mit $\varphi(v_i) \mapsto v_i$ für alle $i \in I$

Beweis: Sei $v \in V$, dann $v = \sum_{i \in I} k_i v_i$ (nur endlich viele $k_i \neq 0$)

" $\sum_{j=1}^{n} k_{i_j} v_{i_j}$ $(n \in \mathbb{N},\ k_{i_j} \in K)$

Falls φ existiert, dann muss gelten $\varphi(v) = \sum_{i \in I} k_i \cdot \varphi(v_i)$

(vernünftige Definition wegen der Eindeutigkeit der Darstellung)

zu zeigen: φ ist linear, d.h. $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(v)$
$\varphi(k \cdot v) = k \cdot \varphi(v)$

auf S. 2 gezeigt

Falls $v = \sum_{i \in I} k_i v_i$, dann $k \cdot v = k \cdot \sum_{i \in I} k_i v_i$

$= \sum_{i \in I} (k \cdot k_i) \cdot v_i$

$\boxtimes$

Bem: Falls $\{w_i \mid i \in I\}$ eine Basis von W sind, dann ist φ ein Isomorphismus.

Beweis: klar: φ ist surjektiv

denn falls $w \in W$, dann $w = \sum_{i \in I} l_i v_i$ (nur endl. viele $\neq 0$)

Dann $w = \varphi\left(\sum_{i \in I} l_i \cdot v_i\right)$

φ ist injektiv: falls $v \neq v'$ dann $\varphi(v) \neq \varphi(v')$

$v = \sum_{i \in I} k_i v_i$ es existiert i_0 mit $k_{i_0} \neq k'_{i_0}$, $\varphi(v) = \sum_{i \in I} k_i w_i$

$v' = \sum_{i \in I} k'_i v_i$ $\varphi(v') = \sum_{i \in I} k'_i w_i$

$\Big\}$ sind verschieden wegen der Eindeutigkeit der Darstellung bzgl. Basis

Folgerung: Falls $\varphi: V \to W$ K-lineare Abbildung, $\square$

dann ist φ durch die Bilder einer Basis von V festgelegt.

Satz: V n-dimensionaler K-Vektorraum

Jede „geordnete Basis" $v_1, \dots, v_n$, legt durch

$v_i \mapsto e_i$ einen K-VR-Isomorphismus $V \longrightarrow K^n$ fest.

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \longmapsto (k_1, \dots, k_n)$$

„Koordinaten von v bzgl. Basis $v_1, \dots, v_n$"

Umgekehrt: Jeder Vektorraumisomorphismus $\varphi : V \to K^n$

$(\varphi^{-1} : K^n \to V)$

bestimmt eine geordnete Basis von V, nämlich $\varphi^{-1}(e_1), \dots, \varphi^{-1}(e_n)$,

und diese Basis legt dann wiederum φ fest.

Fazit: Für n-dimensionales V ist es „das Gleiche", einen Isomorphismus $V \to K^n$ oder eine geordnete Basis von V festzulegen.

Folgerung: Falls V, W beide n-dimensionale K-VR,

dann sind V und W isomorph, $V \cong W$ (d.h. es existiert ein K-VR-Isomorphismus $\varphi : V \to W$)

Bem: Isomorphe VR können mit „intrinsischen" Mitteln (d.h. mit Eigenschaften, die aus Addition und Skalarmultiplikation heraus definierbar sind) nicht unterschieden werden!

Beispiele $K = \mathbb{R}$ (stets $\varphi: V \to W$ linear)

a) $V = W = \mathbb{R}$, Standardbasis $e_1 = 1$

linear Abbildung $\varphi: \underset{V}{\mathbb{R}} \to \underset{W}{\mathbb{R}}$ ist festgelegt durch $\varphi(1) = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\underset{\mathbb{R}}{\underset{\in}{r}}) = \varphi(r \cdot 1) = r \cdot \varphi(1) = r \cdot \lambda$$ „Multiplikation mit λ"

b) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}$ $\quad \varphi(e_1) = \lambda_1, \dots, \varphi(e_n) = \lambda_n$ $\qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i$$
$$= \lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_n \cdot r_n$$

c) $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^m$ $\qquad \varphi(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{e_1}}) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

$$\varphi(r) = \varphi(r \cdot 1) = r \cdot \varphi(1) = r \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \mu_1 \\ \vdots \\ r \cdot \mu_m \end{pmatrix}$$

„$\mathbb{R}$ wird als Gerade in den $\mathbb{R}^m$ Richtung $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ gelegt"

d) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$

Standardbasis $e_1, \dots, e_n$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_{m1} \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ \vdots \\ \mu_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \varphi(e_n) = \begin{pmatrix} \mu_{1n} \\ \mu_{2n} \\ \vdots \\ \mu_{mn} \end{pmatrix}$$

(Achtung: μ_{21} ist eigentlich $\mu_{2,1}$ mit Doppelindex)

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n r_i e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n r_i \cdot \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n r_i \begin{pmatrix} \mu_{1i} \\ \vdots \\ \mu_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \mu_{11} + r_2 \mu_{12} + \dots + r_n \mu_{1n} \\ \vdots \\ r_1 \mu_{m1} + r_2 \mu_{m2} + \dots + r_n \mu_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$\mu_{21} \cdot r_1$

$\mu_{22} \cdot r_2$

$\vdots$

$\mu_{2n} \cdot r_n$

Σ

z.B. 2. Zeile wird herausgenommen und neben $\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ gestellt, komponentenweise multipliziert und addiert und ergibt so die 2. Komponente des Ergebnisses $\longrightarrow$

$(m \times n)$-Matrix

m Zeilen, n Spalten

1. Index, 2. Index

„Matrixmultiplikation"