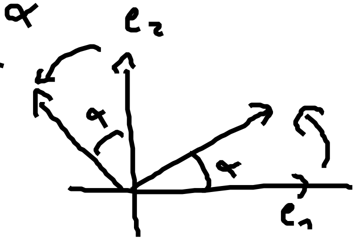
Erinnerung: Matrixdarstellung einer linearen Abbildung $K^n \to K^m$

Spalten der Matrix = Bilder der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$

e) lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Streckung um λ $\quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ „Diagonalmatrix"

Drehung um α



$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

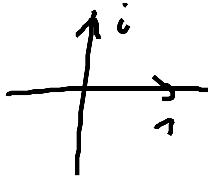
$\alpha = 90° \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha = 45° \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\alpha = 180° \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Drehung um 180°
= Punktspiegelung am Ursprung
= „Streckung um Faktor -1"

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ komplexe Zahlen als Gaußsche Zahlenebene in der üblichen Art



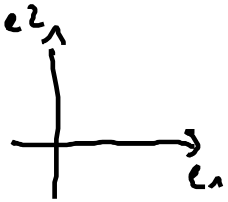
$$\underset{\mathbb{C}}{1} = \underset{\mathbb{R}^2}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \qquad \underset{\mathbb{C}}{i} = \underset{\mathbb{R}^2}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$$

Drehung um $90°$ entspricht der Multiplikation mit i:

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad 1 \mapsto i$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad i \mapsto -1$$

Spiegelung an x-Achse



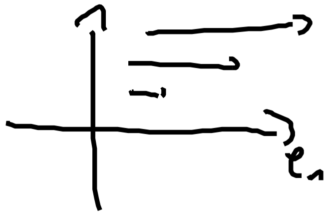
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

y-Achse

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Übung: Spiegelungen an anderen Achsen!

Scherung



$$\begin{pmatrix}1 & \lambda\\0 & 1\end{pmatrix}$$

f) $C^1(\mathbb{R})$ = Menge der stetig differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$-Vektorraum mit punktweiser Addition $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

und Skalarmultiplikation $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$

Ableitung $\frac{d}{dx} f = f'$ ist lineare Abbildung $C^1(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$,

denn $(f+g)' = f' + g'$
$(r \cdot f)' = r \cdot f'$

<u>Spezialfall</u>: Untervektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3
abgeschlossen under Derivation

Basis $1, x, x^2, x^3$

$1' = 0$

Matrix der Ableitung $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

§ 6 Matrixmultiplikation

Bem: $\begin{rcases} \varphi: K^n \to K^m \\ \psi: K^m \to K^l \end{rcases}$ linear $\Rightarrow$ $\psi \circ \varphi: K^n \to K^l$ ist auch linear

Bew: $(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) = \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2))$
$= (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2)$

Skalarmultiplikation: analog $\square$

φ wird durch $(m \times n)$-Matrix A dargestellt
ψ —"— $(l \times m)$-Matrix B —"—
$(\psi \circ \varphi)$ —"— $(l \times n)$-Matrix C —"—

Frage: Wie hängt C mit A und B zusammen;
wie kann man C aus A und B ausrechnen?

$$(\psi\circ\varphi)_{\ell}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} \qquad K^n \xrightarrow{\varphi} K^m \xrightarrow{\psi} K^\ell$$

$$C\cdot\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} = B\cdot\left(A\cdot\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\right) = B\cdot\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n} a_{1i}k_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}k_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{m} b_{1j}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ji}k_i\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{m} b_{\ell j}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ji}k_i\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{1j}\cdot a_{ji}\cdot k_i\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{\ell j}\cdot a_{ji}\cdot k_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{1j}a_{ji}\right)\cdot k_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{\ell j}a_{ji}\right)\cdot k_i\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{m} b_{1j}a_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} b_{1j}a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ \sum_{j=1}^{m} b_{\ell j}a_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} b_{\ell j}a_{jn}\end{pmatrix}}_{C=}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

k-te Spalte

$$C \quad \begin{array}{c|c} & \\ \text{i-te Zeile} & \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ \cdots & & \sum_{j=1}^{m} b_{ij}a_{jk} & & \cdots\\ & & \vdots & & \end{pmatrix}\end{array}$$

i-te Zeile

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} & & \\ b_{i1} & \cdots & b_{im}\\ & & \end{pmatrix}} \quad \underset{A}{\begin{pmatrix} a_{1k}\\ \vdots\\ a_{mk}\end{pmatrix}}$$

k-te Spalte

mult.

mult.

mult.

$$\sum$$

$$b_{i1}\cdot a_{1k} + b_{i2}\cdot a_{2k} + \cdots + b_{im}\cdot a_{mk}$$

Das Produkt zweier Matrizen B und A wird definiert als C,
man schreibt $C = B \cdot A$

Das Ganze ist so eingerichtet, dass die Matrixmultiplikation genau der Verknüpfung von linearen Abbildungen entspricht.

<u>Achtung</u>: $B \cdot A$ für Matrizen A und B ist nur definiert,
wenn B genauso viele Spalten hat wie A Zeilen;

die Anzahl der Zeilen von $B \cdot A$ = Anzahl der Zeilen von B
— " — Spalten — " — = — " — Spalten von A

merke: $(\ell \times m) \cdot (m \times n) = (\ell \times n)$

Die Matrix von $\psi \circ \varphi$ ist das Produkt der Matrix von ψ
mit der Matrix von φ in dieser Reihenfolge!

Bsp. 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 0+3\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot 3 \\ 4\cdot(-1)+5\cdot 0+6\cdot 1 & 4\cdot 0+5\cdot 2+6\cdot 3 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 2 & 28 \end{pmatrix}$$

ohne Gewähr

2) Spiegelung an y-Achse $\circ$ Spiegelung an x-Achse

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Drehung um $180°$

3) Drehung um β $\circ$ Drehung um α = Drehung um $\alpha+\beta$

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Additionstheoreme für sin und cos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Eigenschaften der Matrixmultiplikation

- es gibt auch die punktweise Matrix-Addition
  A, B beides $(m\times n)$-Matrizen, dann ist $A+B$ die $(m\times n)$-Matrix
  mit (i,j)-Eintrag $a_{ij}+b_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

<u>Satz</u> (ohne Beweis, Übung)

a) Matrixmultiplikation und -Addition sind assoziativ. (later)

b) beide Distributivgesetze gelten:

$$(B_1 + B_2)\cdot A = B_1\cdot A + B_2\cdot A$$
$$B\cdot (A_1 + A_2) = B\cdot A_1 + B\cdot A_2$$

immer, wenn sinnvoll

c) Matrixaddition ist kommutativ, hat „Null-Matrix" als „neutrale Element" (d.h. alle Einträge sind 0)

$$-\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

ist inverses Element bzgl. $+$ zu $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

d.h. Die $(m\times n)$-Matrizen $M_{m\times n}(K)$ mit Einträgen aus K bilden eine kommut. Gruppe bzgl. $+$

d) Die Matrixmultiplikation ist i.a. nicht kommutativ,

z.B.
$$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$$

e) Diagonalmatrizen mit Einträgen 1, also Matrizen der Form $\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$, sind neutrale Element bzgl. der Multiplikation

f) Für festes n bilden die „quadratischen" $(n\times n)$-Matrizen bzgl. der Multiplikation ein Monoid mit neutralem Element
$$E_n = Id_n = \underbrace{\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}}_{n}\Big\}n$$

Mit der Addition bilden sie einen (nicht-kommutativen $\underset{n\geq 2}{}$) Ring mit Eins

Bem

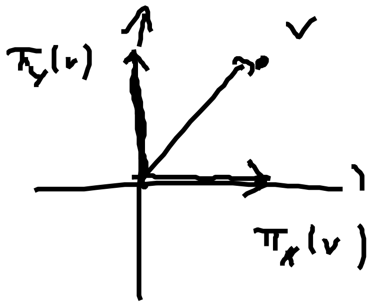
a) (1×1)-Matrizen sind Zahlen, hierfür ist die Multiplikation kommutativ!

b) es gibt sogenannte „nilpotente" Elemente, also Matrizen $A \neq 0$ mit $A^n = 0$ für ein $n > 0$

z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D.h. für Matrizen folgt aus $A \cdot B = 0$ nicht $A = 0$ oder $B = 0$!

z.B für Abbildungen: $\pi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Projektion auf x-Achse
$\pi_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. y-Achse



$\pi_y \circ \pi_x =$ Nullabbildung
$v \mapsto 0$ für alle v

aber $\pi_x \neq$ Nullabb. $\neq \pi_y$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

c) betrachte $(m\times n)$-Matrizen A über Körper K
für $k \in K$ definiere die Skalarmultiplikation $k \cdot A = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k\cdot a_{m1} & \cdots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$

$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ bilden mit Addition und Skalarmultiplikation einen $n\cdot m$-dimensionalen K-Vektorraum.

Standardbasis wird durch die Matrizen

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow j & \end{array}$$

überall 0, bis auf ein 1

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} a_{ij} E_{ij}$$

Eine Aufzählung der Standardbasismatrizen E_{ij} liefert einen VR-Isomorphismus $Mat_{m\times n}(K) \to K^{m\cdot n}$

<u>Bem</u> (ohne Beweis)

falls Produkt sinnvoll

- Es gilt $k\cdot(A\cdot B) = (k\cdot A)\cdot B = A\cdot(k\cdot B)$
- $k\cdot Id_n = \begin{pmatrix} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix}$ $\quad (k\cdot Id_n)\cdot A = A\cdot(k\cdot Id_n) = k\cdot A$