§7 Basiswechsel und invertierbare Matrizen

A $(n\times n)$-Matrix

$\varphi: K^n \to K^n$ ist Isomorphismus
$\quad v \mapsto A\cdot v$

$\iff$ A ist invertierbar, d.h. es existiert eine $(n\times n)$-Matrix A^{-1}
mit $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = \mathrm{Id}_n$
(A^{-1} ist die Matrix zu φ^{-1})

$\iff$ Spaltenvektoren von A, d.h. $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)$, bilden eine Basis von K^n

φ^{-1} ist festgelegt durch $\varphi(e_1)\mapsto e_1, \dots, \varphi(e_n)\mapsto e_n$

Def: V n-dimensionaler K-Vektorraum
W m-dim. — " —

$\varphi: V \to W$ linear

$\mathcal{B}$ geordnete Basis $v_1, \dots, v_n$ von V
$\mathcal{B}'$ — " — $w_1, \dots, w_m$ von W

Isomorphismen $i_{\mathcal{B}}: K^n \to V, \quad e_j \mapsto v_j \qquad j = 1, \dots, n$
$i_{\mathcal{B}'}: K^m \to W, \quad e_j \mapsto w_j \qquad j = 1, \dots, m$

Dann
$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "i_{\mathcal{B}}"] \arrow[rrr, bend right, "i_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi \circ i_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[r, "i_{\mathcal{B}'}^{-1}"] & K^m \end{tikzcd}$$
K-linear

Die Matrix von φ bzgl. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, ${}_{\mathcal{B}'}\varphi_{\mathcal{B}}$, ist die Matrix der Abbildung $i_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi \circ i_{\mathcal{B}}$,

d.h. die Spaltenvektoren der Matrix sind die $(i_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi \circ i_{\mathcal{B}})(e_j) = i_{\mathcal{B}'}^{-1}(\varphi(v_j))$, d.h. die Spaltenvektoren der Matrix sind die Koordinaten von $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ bzgl. der Basis B'.

<u>Spezialfall:</u> $V = W$, $B = B'$, dann schreibe φ_B statt ${}_B\varphi_B$

<u>Satz / Beobachtung:</u> $\varphi: V \to W$, $\psi: W \to X$ Basen B von V, B' von W, B'' von X

$V \overset{?}{\cong} K^n$, $W \overset{?}{\cong} K^m$, $X \overset{?}{\cong} K^l$

Dann ${}_{B''}(\psi \circ \varphi)_B = ({}_{B''}\psi_{B'}) \cdot ({}_{B'}\varphi_B)$

Verknüpfung von Abbildungen

Matrixmultiplikation

$=$ Matrix von $id_{B''}^{-1} \circ \psi \circ \varphi \circ id_B$

$=$ Matrix von $id_{B''}^{-1} \circ \psi \circ id_{B'}$ $\cdot$ Matrix von $id_{B'}^{-1} \circ \varphi \circ id_B$

$=$ Matrix von $id_{B''}^{-1} \circ \psi \circ \cancel{id_{B'} \circ id_{B'}^{-1}} \circ \varphi \circ id_B$

Frage: V Basen B_1, B_2
W Basen B_1', B_2' : Wie hängen ${}_{B_1'}\varphi_{B_1}$ und ${}_{B_2'}\varphi_{B_2}$ zusammen?

$$ {}_{B_2'}\varphi_{B_2} = {}_{B_2'}(\mathrm{id}_W \circ \varphi \circ \mathrm{id}_V)_{B_2} = \underbrace{\left({}_{B_2'}(\mathrm{id}_W)_{B_1'}\right)}_{\uparrow} \cdot \left({}_{B_1'}\varphi_{B_1}\right) \cdot \underbrace{\left({}_{B_1}(\mathrm{id}_V)_{B_2}\right)}_{\uparrow} $$

Basiswechselmatrizen

Bemerkung: ${}_{B'}\mathrm{id}_B$: Spaltenvektoren sind die Koordinaten der Basisvektoren von B bzgl. der Basis B'

${}_{B'}\mathrm{id}_B$ ist stets invertierbar, $\left({}_{B'}\mathrm{id}_B\right)^{-1} = {}_B\mathrm{id}_{B'}$

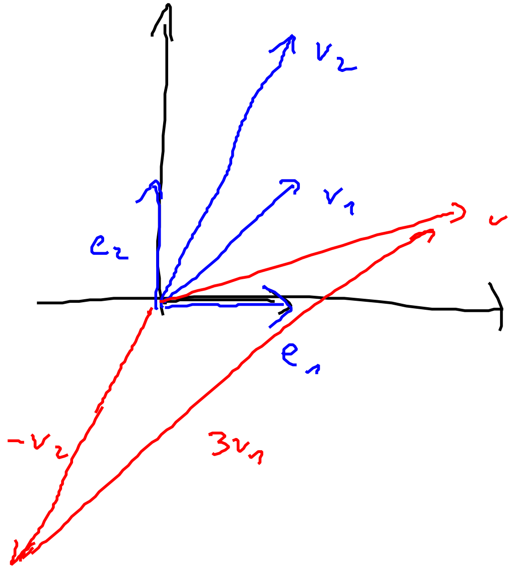
Denn $\left({}_{B'}\mathrm{id}_B\right) \cdot \left({}_B\mathrm{id}_{B'}\right) = \mathrm{id}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Spezialfall $V = W$, $B_1 = B_1'$, $B_2 = B_2'$

$$ \varphi_{B_2} = \left({}_{B_2}\mathrm{id}_{B_1}\right) \cdot \varphi_{B_1} \cdot \left({}_{B_1}\mathrm{id}_{B_2}\right) = \left({}_{B_1}\mathrm{id}_{B_2}\right)^{-1} \cdot \varphi_{B_1} \cdot \left({}_{B_1}\mathrm{id}_{B_2}\right) $$

__Beispiel__ 1) $V = W = K^2$ $\quad B: e_1, e_2$

$B': \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{v_2}$



$\boxed{\varphi: K^2 \to K^2 \text{ soll so sein, dass } \varphi_{B'} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \text{ gilt}}$

$${}_B\mathrm{id}_{B'} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

$${}_{B'}\mathrm{id}_B = \left({}_B\mathrm{id}_{B'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

Probe 1:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Probe 2:

es muss gelten

$$e_1 = 2 \cdot v_1 - v_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$e_2 = -v_1 + v_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\varphi_B = {}_B\mathrm{id}_{B'} \cdot \varphi_{B'} \cdot {}_{B'}\mathrm{id}_B$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}4 & -2\\1 & -1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2 & -1\\2 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -3\\6 & -4\end{pmatrix}$$

d.h. $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_1$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -v_1$$

<u>Bemerkung</u>: angenommen Basen $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, B' sind gegeben,

$w \in B'$: $w = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$a_1, \dots, a_n$ stehen in der Basiswechselmatrix ${}_B\mathrm{id}_{B'}$ in der Spalte für w.

Wie rechnet man $a_1, \dots, a_n$ aus? $w = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$
übersetzt sich in ein lineares Gleichungssystem
mit eindeutiger Lösung
z.B. Gauß-Verfahren

Wie rechnet man A^{-1} aus für invertierbare Matrix A?

geht nicht so schnell!

1. Möglichkeit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Unbekannte}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{"} A \text{"}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Gleichungssystem mit n^2 Unbekannten und n^2 Gleichungen

eigentlich: n Gleichungssysteme à n Gleichungen mit n Unbekannten

2. Möglichkeit: Gaußverfahren

3. Möglichkeit für kleine Matrizen: feste Formeln
2×2, 3×3

Beispiel 2: Basiswechsel bei gleicher Basis mit anderer Reihenfolge?

Basis $\mathcal{B}$: $v_1, \dots, v_n$

Basis $\mathcal{B}'$: $w_1, \dots, w_n$ mit σ Permutation von $\{1,\dots,n\}$,

 $w_1 = v_{\sigma(1)}, \dots, w_n = v_{\sigma(n)}$

d.h. $\sigma: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ bijektiv

Spezialfall: $n=3$, σ: $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$

$\mathcal{B}'$: v_2, v_3, v_1
 $= w_1, w_2, w_3$

$$
{}_{\mathcal{B}'}\mathrm{id}_{\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \end{array}
$$

$v_1 = 0\cdot w_1 + 0\cdot w_2 + 1\cdot w_3$

$v_2 = 1\cdot w_1 + 0\cdot w_2 + 0\cdot w_3$

$v_3 = 0\cdot w_1 + 1\cdot w_2 + 0\cdot w_3$

$$
{}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} & \end{array} = \left({}_{\mathcal{B}'}\mathrm{id}_{\mathcal{B}}\right)^{-1} =
$$

d.h. bei Permutationsmatrizen:
in diesem Fall die an der Diagonalen gespiegelte Matrix!

Permutationsmatrizen sind quadratische Matrizen, bei denen in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 steht und sonst nur 0en.

(kleiner Vorgriff: Bijektionen auf $\{1,\dots,n\}$ bilden eine Gruppe $(\mathrm{Sym}(n), \circ)$ $= S_n$

die symmetrische Gruppe

man hat einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Sym}(n) \longrightarrow$ Permutationsmatrizen)

Spezialfall: Transpositionen sind spezielle Permutationen, die nur 2 Elemente vertauschen, z.B.

$$\tau_{ij} : \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$$

$$\begin{aligned} i &\longmapsto j \\ j &\longmapsto i \\ x &\longmapsto x \quad \text{falls } x \neq i, x \neq j \end{aligned}$$

Basiswechselmatrix zur Transposition τ_{ij}, $M_{(ij)}$,

$$M_{(ij)} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right) = M_{(ij)}^{-1}$$

$$M_{(23)}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot M_{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ i \to \\ j \to \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{array}$$

vertauscht i-te und j-te Zeile

Multiplikation von rechts mit $M_{(ij)}$ vertauscht i-te und j-te Spalte!