Exkurs:

Matrixmultiplikation von 2 $(n \times n)$-Matrizen:

(Güte des Algorithmus wird in der Anzahl der Multiplikationen gerechnet, da Additionen sehr schnell gehen)

„naiver" Algorithmus aus der Definition: n^3 Multiplikationen

~1960 Strassen $O(n^{2,807})$

~1980 Coppersmith-Winograd $O(n^{2,3737})$

2011 Williams $O(n^{2,3727})$

untere Grenze: $O(n^2)$

ein Ziel der Linearen Algebra:

gegeben $\varphi: V \to W$ linear

finde Basen B von V, B' von W so, dass ${}_{B'}\varphi_B$ „möglichst schön".

$\approx$ möglichst viele Nullen

Spezialfall: $V = W \cong K^n$

besonders schön: Diagonalform $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \varphi_B$

$B: v_1, \dots, v_n$

denn dann gilt $\varphi(v_i) = \lambda v_i$

und $\varphi(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \lambda_1 a_1 v_1 + \dots + \lambda_n a_n v_n$

Def: $v \in V$, $v \neq 0$, heißt Eigenvektor der lin. Abb. $\varphi: V \to V$, zum Eigenwert $\lambda \in K$, falls $\varphi(v) = \lambda \cdot v$

Idealfall: man findet eine Basis aus Eigenvektoren!

Falls bekannt ist, dass λ ein Eigenwert ist, findet man zugehörige Eigenvektoren, indem man das Gleichungssystem $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ löst.

Matrix zu φ

Eigenwerte bestimmt man als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

(kommt später oder nachlesen)

Hinderungsgründe:

(1) Drehungen in $\mathbb{R}$-Vektorräumen, z.B. Drehung um $90°$ in $\mathbb{R}^2$

Matrix (in der Standardbasis) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

hier gibt es kein Eigenvektoren!

[aber in $\mathbb{C}^2$ hat die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bzgl der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

die Diagonalform $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

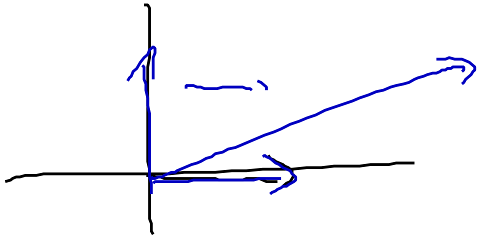
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/i \\ 1 & -1/i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}$$

dürfen Sie gerne alles nachrechnen!]

(2) Scherungen, z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



die einzigen Eigenvektoren sind Vielfache von e_1.

Nicht-lösbares Problem!

Das beste, was man erreichen kann: Jordan'sche Normalform (über $\mathbb{C}$)

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ & \ddots & 1 & & & & \\ 0 & & \lambda_1 & & & & 0 \\ \hline & & & \lambda_2 & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & & \lambda_2 & \\ \hline 0 & & & & & & \ddots \end{array} \end{pmatrix}$$

§8 Lineare Gleichungssysteme

Def: $\varphi: V \to W$ linear

$\operatorname{Bild}(\varphi) = \operatorname{im}(\varphi) := \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W$ geht allgemeiner für beliebige Abbildungen

(image)

$\operatorname{Kern}(\varphi) = \ker(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$

(kernel)

Satz: $\operatorname{Bild}(\varphi)$ und $\operatorname{Kern}(\varphi)$ sind Untervektorräume von W bzw. V.

Beweis: Seien $w_1, w_2 \in \operatorname{Bild}(\varphi)$, d.h. es gibt $v_1, v_2 \in V$ mit $\varphi(v_i) = w_i$

Dann $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = w_1 + w_2$, also $w_1 + w_2 \in \operatorname{Bild}(\varphi)$

Sei $w \in \operatorname{Bild}(\varphi)$, $k \in K$. Dann $w = \varphi(v)$ für ein $v \in V$,

und $\varphi(k \cdot v) = k \cdot \varphi(v) = k \cdot w \in \operatorname{Bild}(\varphi)$.

Seien $v_1, v_2 \in \operatorname{Kern}(\varphi)$. Dann $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0$

$k \in K$ $\qquad \varphi(k \cdot v_1) = k \cdot \varphi(v_1) = k \cdot 0 = 0$

$\square$

$\varphi: V \to W$ linear

$w_0 \in W \qquad \{v \in V \mid \varphi(v) = w_0\} = \varphi^{-1}(w_0)$

2 Fälle:

1. $w_0 \notin \mathrm{Bild}(\varphi)$: $\varphi^{-1}(w_0) = \emptyset$
2. $w_0 \in \mathrm{Bild}(\varphi)$, z.B $\varphi(v_0) = w_0$

Bek: Dann gilt $\varphi^{-1}(w_0) = v_0 + \mathrm{Kern}(\varphi)$
$:= \{v_0 + v \mid v \in \mathrm{Kern}(\varphi)\}$

Beweis: Sei $v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann
$\varphi(v_0 + v) = \varphi(v_0) + \varphi(v) = w_0 + 0 = w_0$

Umgekehrt: Sei $\varphi(v_1) = w_0$
$\varphi(v_1 - v_0) = \varphi(v_1) - \varphi(v_0) = w_0 - w_0 = 0$,
also $v_1 - v_0 \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $v_1 = v_0 + (v_1 - v_0)$ ∎

Nebenbemerkung

Falls $f: A \to B$ bijektive Abb, dann existiert die Umkehrabbildung $f^{-1}: B \to A$

Falls $f: A \to B$ beliebig und $X \subseteq B$, schreibt man $f^{-1}(X)$ für $\{a \in A \mid f(a) \in X\}$, auch wenn f^{-1} als Abbildung nicht existiert.

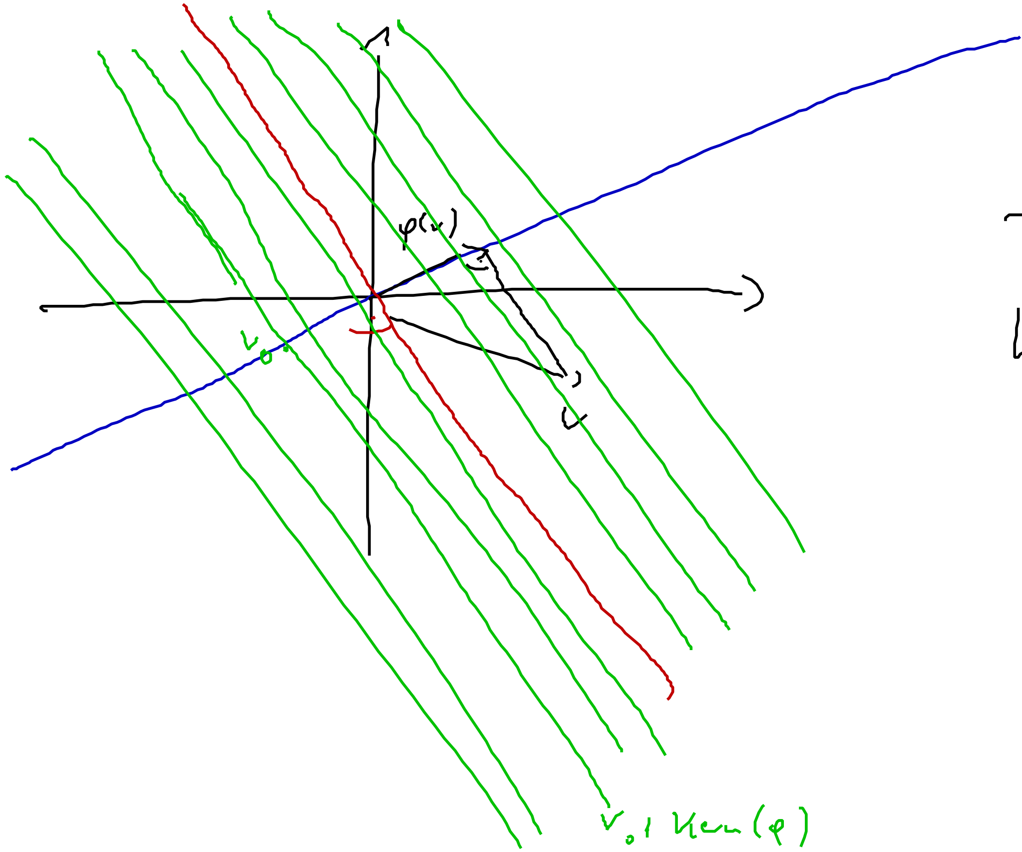
$X = \{b_0\}$, dann schreibt man auch $f^{-1}(b_0)$ statt $f^{-1}(\{b_0\})$

Falls f bijektiv ist, dann ist $f^{-1}(b_0)$ jetzt doppelt definiert:
$f(a_0) = b_0$, dann
$f^{-1}(b_0) = a_0$ nach
und
$f^{-1}(b_0) = \{a_0\}$ nach

Hier gibt es in der math. Schreibweise häufig eine Unsauberkeit!

Bsp: $\mathbb{R}^2$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



φ = Projektion auf blaue Gerade

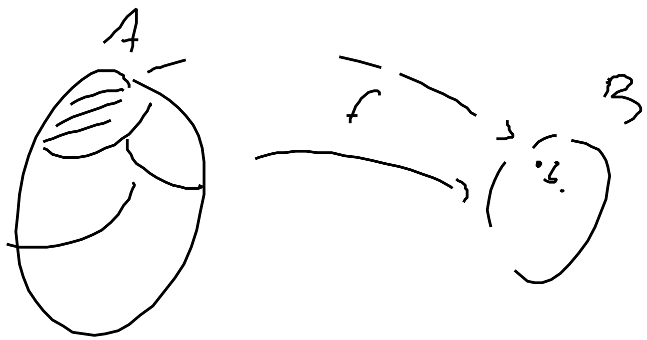
Bild (φ) = blaue Gerade

Kern (φ) = rote Gerade

$f: A \to B$ beliebige Abbildung

$\rightsquigarrow$ Äquivalenzrelation $\sim_f$ auf A,

nämlich $a_1 \sim_f a_2 \iff f(a_1) = f(a_2)$



bei linearen Abbildungen ist die gesamte Äquivalenzrelation bekannt, falls man schon eine Äquivalenzklasse kennt!

Satz: $\varphi: V \to W$ linear. Dann gilt: $\dim \operatorname{Kern}(\varphi) + \dim \operatorname{Bild}(\varphi) = \dim V$

Beweis: Wähle Basis von $\operatorname{Kern}(\varphi)$, $v_1, \dots, v_\ell$ und ergänze sie zu einer Basis $v_1, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_n$ von V.

$\ell = \dim \operatorname{Kern}(\varphi)$
$n = \dim V$
zu zeigen: $\dim \operatorname{Bild}(\varphi) = n - \ell$

Beh: $\varphi(v_{\ell+1}), \dots, \varphi(v_n)$ ist Basis von $\operatorname{Bild}(\varphi)$:

Erzeugendensystem? $w \in \operatorname{Bild}(\varphi)$, $w = \varphi(v)$ für ein $v \in V$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$w = \varphi(v) = \varphi(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \underset{\underset{0}{\parallel}}{a_1 \varphi(v_1)} + \dots + a_n \varphi(v_n) = a_{\ell+1} \varphi(v_{\ell+1}) + \dots + a_n \varphi(v_n)$$

also: sind Erzeuger von $\operatorname{Bild}(\varphi)$.

linear unabhängig? Angenommen nicht, z.B. $\varphi(v_n) = b_{\ell+1} \varphi(v_{\ell+1}) + \dots + b_{n-1} \varphi(v_{n-1})$

d.h. $0 = \varphi\Big(\underbrace{v_n - \sum_{i=\ell+1}^{n-1} b_i v_i}_{\in \operatorname{Kern} \varphi}\Big)$

also existieren $b_1, \dots, b_\ell$ mit $v_n - \sum_{i=\ell+1}^{n-1} b_i v_i = b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell$

bzw. $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_i v_i$

Widerspruch zur lin. Unabh. der $v_1, \dots, v_n$ ☒

lin. Gleichungssystem

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{matrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A :=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b :=}$$

Lösungsmenge des Gleichungssystems ist $\varphi^{-1}(b)$

(Multiplikation mit A ist eine lineare Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$)

Bem: meistens schreibt man diese Abbildung auch A !

2 Fälle

1) $\varphi^{-1}(b) = \emptyset$

2) $\varphi^{-1}(b)$ ist von der Form $c_0 + \mathrm{Kern}(\varphi)$

$\mathrm{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(0) =$ Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems "
$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bem: 1) falls $b = 0$, tritt der erste Fall nicht auf, denn $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

2) vollständige Lösung des Gleichungssystems (im Fall 2) besteht in:
einer speziellen Lösung c_0 (mit $A \cdot c_0 = b$)
und der Angabe einer Basis des Kerns