$(m \times n)$-Matrix A definiert lin. Abbildung $A: K^n \to K^m$
$v \mapsto A \cdot v$

Def: Der Rang der Matrix, $rg(A)$, ist $\dim \text{Bild}(A)$

$\text{Bild}(A) = \langle A \cdot e_1, \dots, A e_n \rangle$ „Spaltenraum"
$\cap$ Spalten von A
K^m

" Dimension des Spaltenraums
|| (ohne Beweis)
Dimension des Zeilenraums

Bem:
1.) $rg(A)$ misst „wie surjektiv" die Abbildung A ist
A surjektiv $\Leftrightarrow rg(A) = m$

2) $\text{Kern}(A)$ bestimmt, „wie injektiv" die Abbildung A ist
A injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(A) = \{0\}$

3) falls $m = n$: $n = \dim \text{Bild}(A) + \dim \text{Kern}(A)$,
also A ist injektiv $\Leftrightarrow$ A ist surjektiv $\Leftrightarrow$ A ist bijektiv
$\text{Kern}(A) = \{0\}$ $\qquad$ $\text{Bild}(A) = K^n$

Bsp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeilenraum:
$\langle (1,2,3), (4,5,6), (0,1,2), (3,4,5) \rangle \leq K^3$

Spaltenraum
$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \leq K^4$

Bem: Falls $A : K^n \to K^m$ die Matrix eines homogenen lin. Gleichungssystems (LGS),

dann Dimension des Lösungsraums $=$ Dimension $\mathrm{Kern}(A) = n - \mathrm{rg}(A)$

Gauß-Verfahren

Idee: bringe die Matrix A durch „elementare Umformungen", die die Lösungsmenge nicht (oder in einer kontrollierten Weise) ändern, in eine „schöne Form", aus der man Gesuchtes leicht errechnen kann.

elementare Umformungen

Basis $v_1 \dots v_n$ wird ersetzt durch

① Vertauschung von Zeilen (i-te und j-te Zeile) $\hat{=}$ Multiplikation von links mit

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 1 & \\ & & & & \\ & 1 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \hat{=} \quad v_1 \cdots v_j \cdots v_i \cdots v_n$$

selbstinvers

$E_{ji} = E_{ij}$

$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$

② Addition des k-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile $\hat{=}$ Multiplikation von links mit

$$E_{ij}(k) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & k & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \hat{=} \quad v_1 \dots v_i - k v_j \dots v_n$$

Inverse: $-k$-faches der j-ten Zeile zur i-ten Zeile

$$E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$$

③ Multiplikation der i-ten Zeile mit $k \neq 0$ $\hat{=}$ Multiplikation von links mit

$$E_i(k) = \begin{array}{c} \; i \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot i$$

$\hat{=}$ $v_1 \dots \frac{1}{k} v_i \dots v_n$

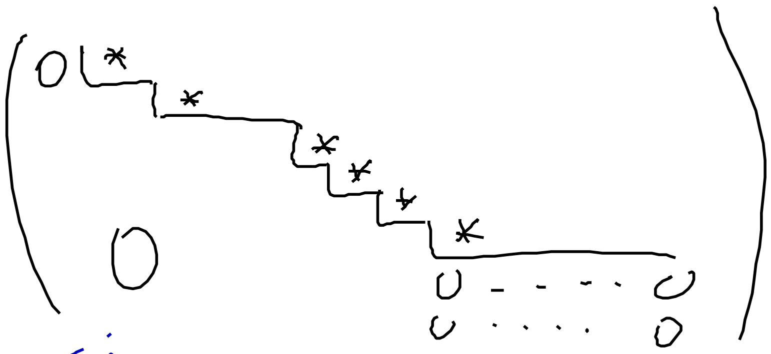
Inverse: Multiplikation der i-ten Zeile mit k^{-1}

$$E_i(k) = E_i(k^{-1})$$

(manchmal auch Spaltenoperationen, z.B. Spaltenvertauschungen; diese sind aber nur zur Verbesserung von Algorithmen (Stabilität) nötig)

Was heißt „schön"?

a) Matrix in Zeilenstufenform



$* \neq 0$

formal: es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ (Rang) und $a_{1j_1} \neq 0, \dots, a_{rj_r} \neq 0$ mit: falls $\left(\begin{array}{c} i > r \\ i \leq r \text{ und } j < j_i \end{array} \right)$ dann $a_{ij} = 0$

und $j_1 < j_2 < \dots < j_r$

b) Matrix in Zeilenstufenform mit $* = 1$

c) Matrix in Diagonalform

d) — " — mit Diagonaleinträgen 1

) im quadratischen Fall oder

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Satz / Bemerkungen:

Jede Matrix kann durch eine Folge elementarer Umformungen der Art (1) und (2) in Zeilenstufenform gebracht werden, mit Umformungen (3) auch in Zeilenstufenform mit „Eckeinträgen" 1 (Version b)

Jede quadratische Matrix kann durch elementare Umformungen (1) – (3) in Diagonalform gebracht werden; falls sie invertierbar ist, sogar zur Identitätsmatrix.

Beobachtung: Sei E Matrix zu einer elementaren Umformung (E_{ij}, $E_{ij}(\lambda)$, $E_i(\lambda)$),

dann $\underset{\substack{\shortparallel \\ E^{-1}\cdot E\cdot A x}}{Ax} = \underset{\substack{\shortparallel \\ E^{-1}\cdot E\cdot b}}{b} \iff E\cdot A\cdot x = E\cdot b$ (da E invertierbar)

d.h. elementare Umformungen, die gleichzeitig auf die Matrix A und den Vektor b angewandt werden, verändern die Lösungsmenge nicht.

Falls A invertierbar ist und $E_1, \dots, E_k$ eine Folge von Matrizen zu elementaren Umformungen mit $\underbrace{E_k \cdot \ldots \cdot E_1}_{A^{-1}} \cdot A = \mathrm{Id}$

Algorithmus, um Matrix in Zeilenstufenform zu bringen

arbeite Spalten von links nach rechts und Zeilen von oben nach unten ab,

Setze aktuelle Zeile $i := 1$, aktuelle Spalte $j := 1$

Ist $a_{ij} = 0$?

↳ Falls ja, gibt es ein $a_{kj} \neq 0$ mit $k > i$

(gibt es unterhalb von a_{ij} einen Eintrag $\neq 0$?)

↳ Falls ja, vertausche Zeile i und Zeile k

↳ Falls nein, setze aktuelle Spalte $+ 1$

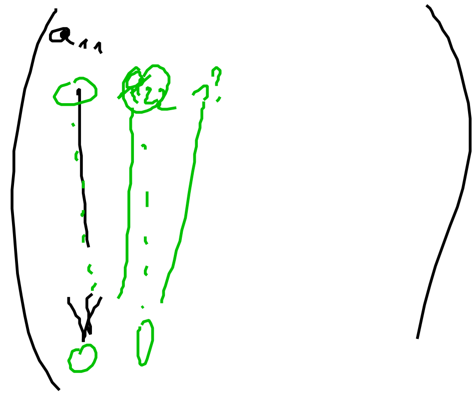
↳ Falls nein, ersetze für alle $k > i$

Zeile k durch Zeile $k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} \cdot$ Zeile i

(d.h. $a_{kj}^{neu} = 0$)

Setze aktuelle Spalte $+ 1$, aktuelle Zeile $+ 1$

Ende, falls aktuelle Spalte $>$ Spaltenzahl



Im quadratischen Fall (Gauß-Jordan-Verfahren)

(analog, erst Zeilenstufenform,

dann „oberes Dreieck" von unten nach oben und rechts nach links reduzieren,

Falls Inverse einer Matrix gesucht ist)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4-4\cdot 1 & 5-4\cdot 2 & 6-4\cdot 3 \\ 7-7\cdot 1 & 8-7\cdot 2 & 9-7\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0-2\cdot 0 & -6-2\cdot(-3) & -12-2\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$E_5 \cdots E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_5 \cdots E_1 \cdot \mathbb{1} = A^{-1}$$

Was kann man mit dem Gauß-Verfahren ausrechnen?

1) Invertieren von Matrizen: starte mit $(A \mid Id)$

ende mit $(Id \mid A^{-1})$

(auch Test, ob Matrix invertierbar ist)

2) Spezielle Lösungen von Gleichungssystemen $A \cdot x = b$

starte mit $(A \mid b)$, bringe es in Zeilenstufenform Z_A

durch eine Folge elementarer Umformungen $E_1, \dots, E_k$

ende mit $(Z_A \mid E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot b)$

„Rückwärtseinsetzen": löse Gleichungen von unten nach oben,

falls Unbekannte durch eine Gleichung nicht eindeutig bestimmt ist, setze beliebigen Wert ein (z.B. $= 0$)

3) Basis vom Kern?

Löse Gleichungssystem $Z_A \cdot x = 0$

jedesmal, wenn Unbekannte nicht eindeutig festgelegt sind,

wähle für eine den Wert 1, für den anderen den Wert 0

Diese Lösungen ergeben eine Basis.

Bsp.:

$$Z_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & - & - & - & - & - & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rang}(Z_A) = 3$

4. Gleichung

$(0 \cdot x_1 + \dots +)\, 0 \cdot x_7 = 0$ x_7 nicht festgelegt $<$ Wahl $x_7 = 0$, $x_7 = 1$

3. Gleichung

$1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 0$ x_6 ist durch Wahl von x_7 festgelegt

2. Gleichung $1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 0$ x_5 ist nicht festgelegt $<$ Wahl $x_5 = 0$, $x_5 = 1$

x_4 ist durch x_7, x_6, x_5 festgelegt

1. Gleichung $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 x_7 = 0$

x_3, x_2 nicht festgelegt

x_1 ist durch $x_2, \dots, x_7$ festgelegt

Basis des Kerns: $x_7 = 1$, $x_5 = x_3 = x_2 = 0$, Rest ausrechnen

$x_5 = 1$, $x_7 = x_3 = x_2 = 0$ — " —

$x_3 = 1$, $x_7 = x_5 = x_2 = 0$

$x_2 = 1$, $x_7 = x_5 = x_3 = 0$

4) Rang der Matrix = Anzahl der $*$-Elemente in Zeilenstufenform Z_A

5) Basis vom Bild? Spaltenvektoren $Ae_1, \dots, Ae_n$

$Ae_{i_1}, \dots, Ae_{i_k}$ sind linear unabhängig

$\Leftrightarrow \quad Z_A e_{i_1}, \dots, Z_A e_{i_k}$ — " —

In der Zeilenstufenform sieht man sofort, ob Spaltenvektoren linear unabhängig sind oder nicht; eine Basis wird von den Spaltenvektoren mit $*$-Einträgen gebildet; bei den Spalten von A dann an den gleichen Stellen!

damit kann auch aus einer Menge von Spaltenvektoren eine Basis extrahiert werden

Eine Menge von lin. unabh. Spaltenvektoren kann zu einer Basis ergänzt werden, indem Sie das Verfahren auf $(A \mid Id)$ anwenden.