6) Ergänzung zu einer Basis (noch einmal ausführlich erklärt)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

*-Elemente heißen auch Pivot-Elemente

1. Methode

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\2&1&1&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&1&0\\2&2&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0&0\\0&0&0&-1&0&1&0\\0&0&-1&-2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0&0\\0&0&-1&-2&0&0&1\\0&0&0&-1&0&1&0\end{pmatrix}$$

Ausgangsvektoren

e_1 oder e_3 können als Basisergänzung gewählt werden!

2. Methode

$$\begin{pmatrix}1&2&1&2\\1&1&1&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-1&0&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-1&0&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\e_2\\e_4\end{array}$$

e_3 „fehlt" und ergänzt die 3. Vektoren zur Basis!

Verfahren gibt auch hier z.B. e_2 und e_4 als Linearkombination der Startvektoren

Aus Gauß folgt auch $rg(A) = rg(A^T)$

denn die elementaren Umformungen ändern weder $rg(A)$, noch $rg(A^T)$, und in Gauß-Jordan-Form sieht man die Gleichheit sofort.

"Transponierte von $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ $(m \times n)$-Matrix

ist $A^T = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ $\quad b_{ij} = a_{ji}$ $(n \times m)$-Matrix

„gespiegelt an der Hauptdiagonalen"

Bsp.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Zusammenfassung:

A $(m \times n)$-Matrix und damit $K^n \to K^m$

Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit m Gleichungen, n Unbekannten

$rg(A) \leq \min\{m, n\}$

Eindeutigkeit von Lösungen?

- Falls $m \geq n$ und $rg(A) = n = \dim \text{Bild}(A)$, dann $\dim \text{Ker}(A) = 0$, dann sind Lösungen von $A \cdot x = b$ eindeutig, sofern sie existieren.
- Falls $m < n$, so sind Lösungen nie eindeutig, sondern der Lösungsraum von $A \cdot x = 0$ (d.h. $\text{Ker}(A)$) hat Dimension $n - rg(A)$

Existenz von Lösungen?

- Es gibt genau dann (mind.) eine Lösung von $Ax = b$, falls $b \in \text{Bild}(A)$
- Falls $m \leq n$ und $rg(A) = m$, so gibt es immer eine Lösung.
- Falls $m > rg(A)$, also insb. falls $m > n$, dann gibt es immer $b \in K^m$ so, dass $A \cdot x = b$ keine Lösung hat.

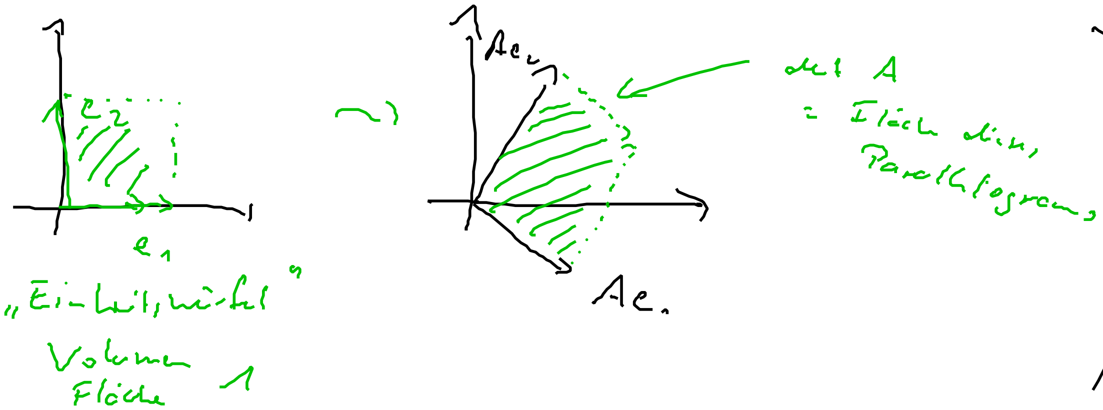
Falls $m = n = rg(A)$, dann gibt es zu jedem $b \in K^n$ genau eine Lösung, nämlich $A^{-1} \cdot b$

(bei einem Gleichungssystem $Ax = b$ besser Zeilenstufenform + Rückwärtseinsetzen; bei vielen LGS $Ax = b_1, \ldots, Ax = b_k$, lohnt es sich A^{-1} auszurechnen).

§9 Determinanten (ohne Beweis)

Die Determinante einer $(n \times n)$-Matrix A bzw. einer linearen Abbildung $K^n \to K^n$ misst die „Volumenänderung" durch die Abbildung (reelle VR)

(z.B. $\mathbb{R}^2$ („Flächenänderung"))



d.h. $\dfrac{\text{Volumen des von } Av_1, \dots, Av_n \text{ aufgespannten Raumteils}}{\text{Volumen des von } v_1, \dots, v_n \text{ aufgespannten Raumteils}}$

$v_1, \dots, v_n$ Basis

da die Abbildung linear ist, ist dieses Verhältnis von $v_1, \dots, v_n$ unabhängig (muss bewiesen werden!)

Vorgehensweise:

- man beschreibt Eigenschaften, die die Determinante haben soll
- man stellt fest, dass es genau eine Möglichkeit gibt, eine Funktion mit diesen Eigenschaften festzulegen
- man sieht, dass man sie in reellen VR sinnvollerweise als Volumenänderung interpretieren kann,

Eigenschaften:

- $\det A = 0 \iff rg(A) < n \iff A$ nicht invertierbar
- $\det(Id_n) = 1$
- det ist linear in den Spalten und linear in den Zeilen der Matrizen,

  d.h. $A = (s_1 | \dots | s_n)$, dann $\det\big((s_1|\dots|k\cdot s_i|\dots|s_n)\big) = k \cdot \det(A)$

  ↑ Spalten

  $$\det\big((s_1|\dots|s_i' + s_i''|\dots|s_n)\big)$$
  $$= \det\big((s_1|\dots|s_i'|\dots|s_n)\big) + \det\big((s_1|\dots|s_i''|\dots|s_n)\big)$$

  und analog für die Zeilen.

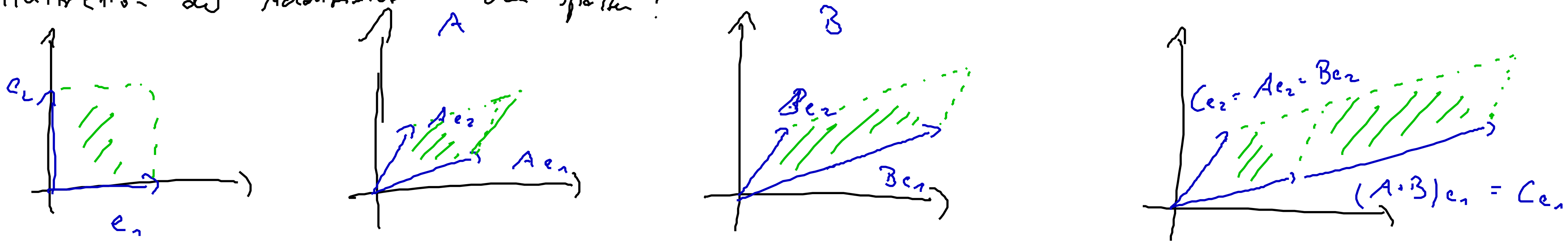
- das Volumen soll „orientiert" sein, d.h. hat ein Vorzeichen (im reellen Fall), d.h.

  $$\det(E_{ij} \cdot A) = \det(A \cdot E_{ij}) = -\det(A)$$

  Permutationsmatrix zur Transposition (ij),
  d.h. es werden die i-te und j-te Zeile bzw. die i-te und j-te Spalte von A vertauscht

Diese Liste von 4 Eigenschaften legen eine eindeutige Determinanten-Funktion fest!

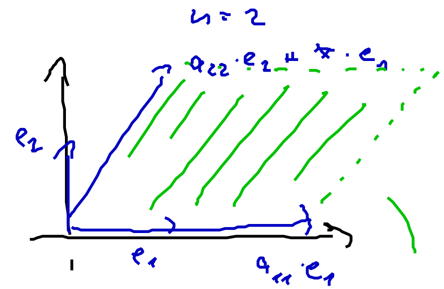
Illustration der Additivität in den Spalten!



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Weitere Eigenschaften und Formeln

- $\det(A) = \det(A^T)$, d.h. alles über Spalten Gesagte gilt auch für „Zeilen und umgekehrt"
- $\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$



Fläche ist $a_{11} \cdot a_{22}$

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

insbesondere $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ falls A invertierbar

- **Entwicklungssatz für Determinanten**

Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =: A_{ij}$$

$(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht

Entwicklung nach der j-ten Spalte

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

$\rightsquigarrow$ Determinanten rekursiv ausrechnen,

bei (1×1)-Matrizen: $\det\big((a_{11})\big) = a_{11}$

- mit Gauß-Verfahren auf Dreiecksmatrix bringen
  - Vertauschung von zwei Zeilen ändert die Determinante um das Vorzeichen! $\quad \det E_{ij} = -1$
  - Multiplikation einer Zeile mit $k \in K$ ändert die Determinante um den Faktor k

$$\det E_i(k) = \det \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} = k$$

  - Addition des k-fachen einer Zeile zu einer anderen ändert die Determinante nicht!

$$\det E_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & k \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- Formel von Lagrange (nicht zum Ausrechnen von Determinanten geeignet)

Signum der Permutation, +1 oder −1

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Menge der Bijektionen $\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$
d.h. Permutationen oder Vertauschungen
von $\{1,\ldots,n\}$