$\varphi: V \to V$ lin. Abb, V n-dimensionaler K-VR

B, B' Basen von V

$$\varphi_B = {}_B\mathrm{id}_{B'} \cdot \varphi_{B'} \cdot {}_{B'}\mathrm{id}_B = ({}_{B'}\mathrm{id}_B)^{-1} \cdot \varphi_{B'} \cdot ({}_{B'}\mathrm{id}_B)$$

$$\det(\varphi_B) = \underbrace{\det({}_{B'}\mathrm{id}_B)^{-1}}_{= \frac{1}{\det({}_{B'}\mathrm{id}_B)}} \cdot \det \varphi_{B'} \cdot \det({}_{B'}\mathrm{id}_B) = \det \varphi_{B'}$$

$\rightsquigarrow$ Man kann die Determinante einer lin Abb $\varphi: V \to V$ (V endl. dim. VR) definieren als die Determinante einer der darstellenden Matrizen.

Schreibweise:

man schreibt für $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ auch $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Spezielle Formeln für kleine Matrizen:

$\boxed{n=1}$

$$\underbrace{|a_{11}|}_{\det(a_{11})} = a_{11}$$

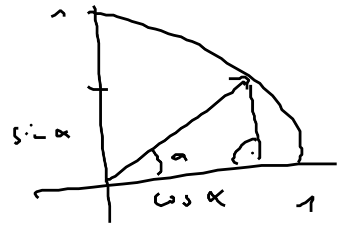
(hier meinen die senkrechten Striche die Determinante, nicht den Betrag)

$\boxed{n=2}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Bsp:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$



$\boxed{n=3}$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

ab $n=4$ keine einfach zu merkenden und kurzen expliziten Formeln mehr!

Es gibt eine explizite Formel für die Inverse einer Matrix, die allerdings zum konkreten Ausrechnen nicht besonders nützlich ist.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left((-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij} \right)^{T}_{1 \le i,j \le n}$$

← Transponierte

die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

[3]

---

§ 10 Skalarprodukt, Länge, Winkel

In diesem Paragrafen soll stets $K = \mathbb{R}$ sein; alle Vektorräume seien über $\mathbb{R}$!

Def: Das (Standard-) Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle v, w \rangle = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

(mit $v = (v_1, \dots, v_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$)

Eigenschaften

(a) Positivität: $\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0$

$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

(b) Symmetrie: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

$v, v', w, w' \in \mathbb{R}^n$
$r \in \mathbb{R}$

(c) Bilinearität: $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$

$\langle v, r \cdot w \rangle = r \cdot \langle v, w \rangle$

$\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$

$\langle r \cdot v, w \rangle = r \cdot \langle v, w \rangle$

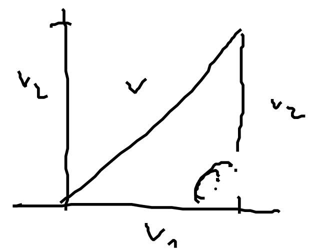
[d.h. das Skalarprodukt ist als Abbildung im 1. Argument (bei festem 2. Argument) eine lineare Abbildung, ebenso als Abb. im 2 Argument]

Länge

$v \in \mathbb{R}^n$

Die Länge (oder die Norm) von v ist

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

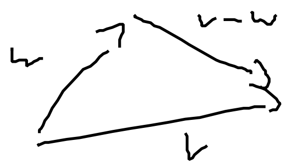


Pythagoras: Länge von v ist $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Abstand (Distanz) zwischen Vektoren

$d(v, w) := \|v - w\|$

Man sieht: $\|v\| = d(v, 0)$



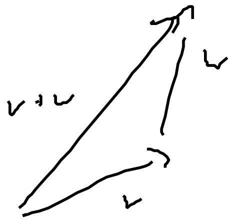
Eigenschaften

$u, v, w \in \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}$

- $\|v\| \geq 0$

  $\|v\| = 0 \iff v = 0$
-
- $\|r \cdot v\| = |r| \cdot \|v\|$
- Dreiecksungleichung

  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$



- $d(v,w) \geq 0$

  $d(v,w) = 0 \iff v = w$
- $d(v,w) = d(w,v)$
- $d(r \cdot v, r \cdot w) = |r| \cdot d(v,w)$
- $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$

Satz von Cauchy-Schwarz

Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$: $\quad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i \cdot w_i)^2 = \langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2\right)$$

Folgerung: $\quad -1 \leq \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} = \left\langle \dfrac{v}{\|v\|}, \dfrac{w}{\|w\|} \right\rangle \leq 1$

= der Vektor, der in die gleiche Richtung wie v zeigt und Länge 1 hat

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$$

Beweis von Cauchy-Schwarz

1. Fall: $w \neq 0$

$\|w\|^2 = \langle w, w \rangle$

$$0 \leq \left\langle v - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} \cdot w ,\; v - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} \cdot w \right\rangle$$

$$= \langle v,v\rangle - 2 \cdot \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2} \langle v,w\rangle + \frac{\langle v,w\rangle^2}{\|w\|^4} \cdot \langle w,w\rangle$$

$$= \frac{1}{\|w\|^2}\left(\langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle - 2 \cdot \langle v,w\rangle^2 + \langle v,w\rangle^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\|w\|^2}\left(\langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2 \right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2$$

$$\Rightarrow \quad \langle v,w\rangle^2 \leq \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

2. Fall $w = 0$: klar $0 \leq 0$ ∎

alternativ (für Dimension $n=2$)

- Skalarprodukt ist unter Drehungen invariant:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{D} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot \cos\alpha - v_2 \cdot \sin\alpha \\ v_1 \cdot \sin\alpha + v_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

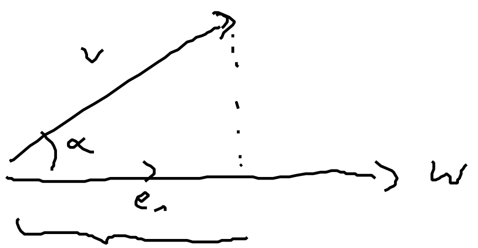
$$\langle Dv, Dw \rangle = (v_1 \cdot \cos\alpha - v_2 \cdot \sin\alpha) \cdot (w_1 \cdot \cos\alpha - w_2 \cdot \sin\alpha) + (v_1 \cdot \sin\alpha + v_2 \cos\alpha)(w_1 \sin\alpha + w_2 \cdot \cos\alpha)$$

$$= v_1 \cdot w_1 \cdot \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{=1}$$
$$+ v_1 \cdot w_2 \underbrace{(-\cos\alpha \sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha)}_{=0}$$
$$+ v_2 w_1 \underbrace{(-\sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha)}_{=0}$$
$$+ v_2 w_2 \underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{=1}$$
$$= v_1 w_1 + v_2 w_2 = \langle v, w \rangle$$

Nebenbem.:
3-dim Drehmatrix um z-Achse

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- o.E. $\frac{w}{\|w\|} = e_1$, d.h. w zeigt in Richtung e_1



$v_1 = \cos\alpha \cdot \|v\|$

$$\langle v, w \rangle = \|w\| \cdot \langle v, \frac{w}{\|w\|} \rangle = \|w\| \cdot \langle v, e_1 \rangle = \|w\| \cdot v_1$$

d.h. $\langle v, w \rangle$ ist das Produkt der Länge des einen Vektors mit der Länge der Projektion des anderen Vektors auf den ersten.

$\rightsquigarrow$ Cauchy-Schwarz, da $\underset{\sqrt{v_1^2}}{\underset{\shortparallel}{|v_1|}} \le \|v\| = \sqrt{\sum v_i^2}$

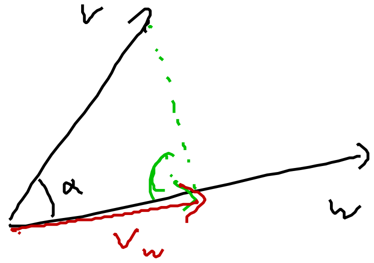
$$\boxed{\langle v, w\rangle = \|w\|\cdot\|v\|\cdot\cos\alpha = \|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos\measuredangle(v,w)}$$

zwischen v und w eingeschlossene Winkel

$$\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \cos\measuredangle(v,w)$$

<u>orthogonale Projektion von v auf w</u>

$$\boxed{v_w = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\cdot w}$$



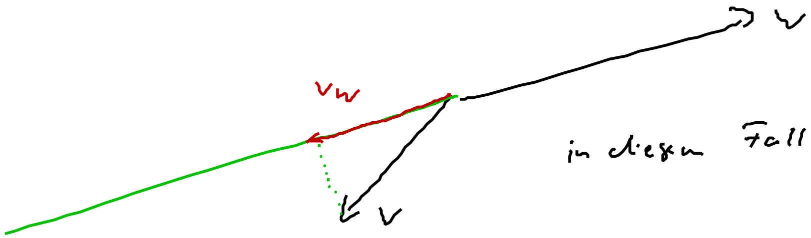
$$\|v_w\| = \|v\|\cdot\cos\alpha$$

$$= \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|}$$

d.h. $v_w = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|w\|}\cdot\dfrac{w}{\|w\|}$

$w \neq 0$

Funktioniert auch mit Orientierung



in diesem Fall ist $\langle v,w\rangle < 0$

Verallgemeinerter Satz des Pythagoras

$$\|v+w\|^2 = \sum_{i=1}^n (v_i+w_i)(v_i+w_i) = \sum_{i=1}^n v_i^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 + 2\sum_{i=1}^n v_i w_i$$

$$= \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

Also: $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \langle v,w\rangle = 0$

$\iff \cos\sphericalangle(v,w) = 0$

$\iff$ v und w stehen senkrecht aufeinander

Def: (für n-dimensionale VR, n allgemein) $v,w \in \mathbb{R}^n$ stehen senkrecht aufeinander $(v,w \neq 0)$

$:\iff \langle v,w\rangle = 0$

Für abstrakte n-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume gibt es kein intrinsisches Skalarprodukt (Längen-, Winkelmessung), sondern jede Festlegung einer Basis erlaubt über die Identifikation mit $\mathbb{R}^n$ das dortige Standardskalarprodukt zu benutzen.

Def.: $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin. Abb heißt <u>orthogonale Abbildung</u>

falls $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$

$(n\times n)$ Matrix A heißt <u>orthogonal</u>, falls die zugehörige Abbildung orthogonal ist.

<u>Satz</u> (ohne Beweis) A ist orthogonal $\iff$ A^{-1} existiert

und $A^{-1} = A^T$

<u>Bsp:</u>
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Orthogonale Abbildungen sind
- längentreu, d.h. $\|Av\| = \|v\|$,
- winkeltreu, d.h. $\sphericalangle(Av, Aw) = \sphericalangle(v, w)$,
- volumentreu, $\det A = \pm 1$

$$\left.\begin{aligned} \det A^T &= \det A \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\det A)^2 = 1$$