Kapitel III ANALYSIS MEHRERER VERÄNDERLICHER

in der Regel: ohne Beweise

Mathe I: Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

jetzt: Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Erinnerung: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$

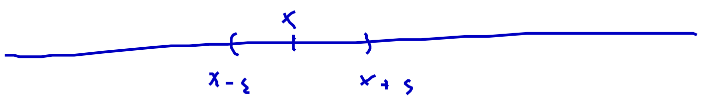
D „schön", in der Regel D offen
d.h. kein Randpunkt

$\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ ist offen $\iff$ für jedes $x \in \mathcal{O}$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq \mathcal{O}$

$= (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

$= \{y \mid |x-y| < \varepsilon\}$

$= \{y \mid x-\varepsilon < y < x+\varepsilon\}$



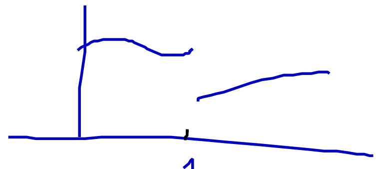
$\iff$ $\mathcal{O}$ ist Vereinigung von offenen Intervallen $]a,b[$

$A \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen $\iff$ $\mathbb{R} \setminus A$ ist offen

$\iff$ für jede konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$ ist auch der Grenzwert in A

„abgeschlossen" = enthält alle Randpunkte, „offen" = enthält keine Randpunkte

$f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ „kein Sprungstellen"



- (Folgenstetigkeit): für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \in D$ gilt:
  wenn $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0 konvergiert,
  dann konvergiert $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$

- (ε-δ-Kriterium): für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in D$ gilt:
  $$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

äquivalent:

- (topologisch): für jede offene Menge $\mathcal{O} \ni f(x_0)$ gibt es eine offene Menge $\mathcal{O}' \ni x_0$ mit $\mathcal{O}' \subseteq f^{-1}(\mathcal{O})$
  (bzw. $f(\mathcal{O}') \subseteq \mathcal{O}$)

$B_\varepsilon(y) :=]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$
die „ε-Umgebung von y"
bzw. der „offene Ball vom Radius ε um y"

$$f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(x_0))\right) \supseteq B_\delta(x_0)$$

$f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$ „kein Knicke"

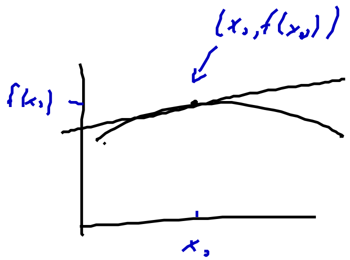
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert}$$

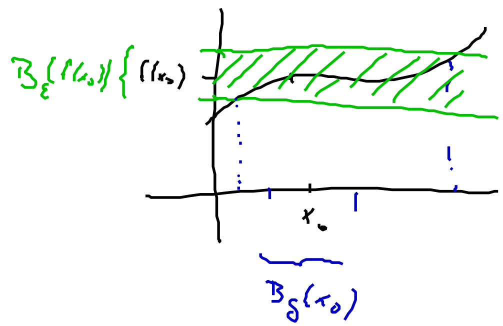
$$\shortparallel$$

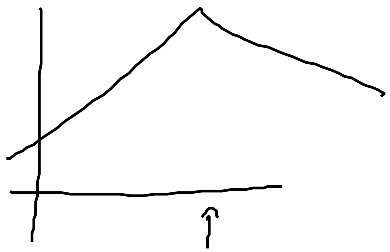
$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Ableitung von f an der Stelle x

Steigung der Tangente am Graph von f an der Stelle $(x_0, f(x_0))$







nicht differenzierbar

falls $f: D \to \mathbb{R}$ für alle $x \in D$ differenzierbar ist,

dann erhält man eine (neue) Funktion $f': D \to \mathbb{R}$

„stetige Differenzierbarkeit": f' existiert und ist stetig

„zweimal differenzierbar": f' ist differenzierbar, d.h. f'' existiert

etc.

n-te Ableitung $f^{(n)}$ bzw $\frac{d^n}{dx^n}$

$$C^k(D, \mathbb{R}) := \{ f: D \to \mathbb{R} \mid f \text{ k-mal stetig differenzierbar} \}$$

d.h. $f^{(k)}$ existiert und ist stetig

<u>Taylorentwicklung</u>: Sei $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, dann kann man f annähern durch ein Polynom vom Grad k:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) \cdot (x - x_0)^i + \text{Restglied}$$

$f^{(0)} = f$

Besonders schöne Funktionen sind die „analytischen Funktionen", die als Taylor-Reihe darstellbar sind, d.h. unendlich oft differenzierbar

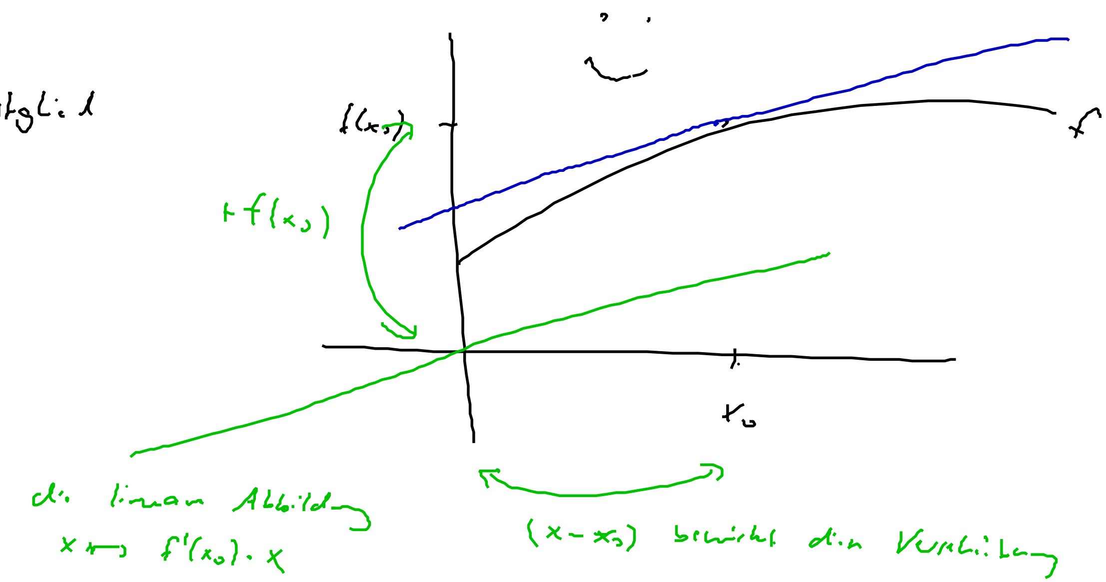
und $$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Bsp $$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Taylor-Annäherung für $k=1$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{} + \text{Restglied}$$

"Tangente von f an der Stelle x_0"
ist der Graph dieser Funktion



§1 Wie versteht man Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

Graph von f: $\{\underbrace{(x_1,\dots,x_n, f(x_1,\dots,x_n))}_{\text{kann man als } n+m\text{-Tupel auffassen}} \mid x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ o.E.

falls $m>1$: $f(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$

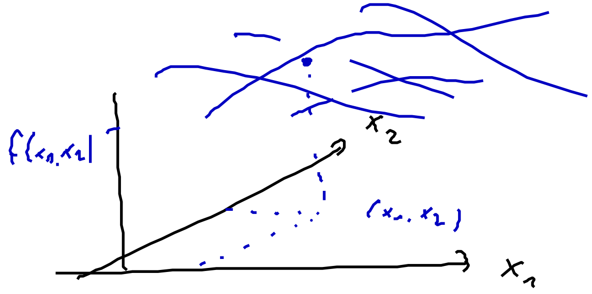
Komponentenfunktionen $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

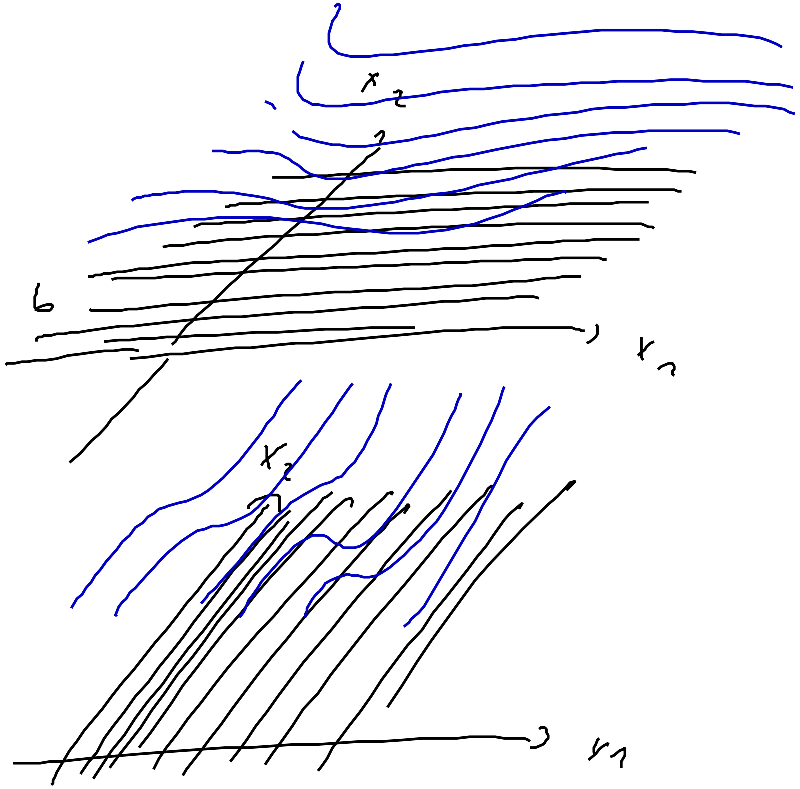
[Projektion $\pi_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$(x_1,\dots,x_m) \mapsto x_i$ $\qquad f_i = \pi_i \circ f$]

problemlos visualisierbar ist f für $n + m \leq 3$

$n = m = 1$ ✓

$n = 2,\ m = 1$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$





„Funktionsschar"

$f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x, b)$

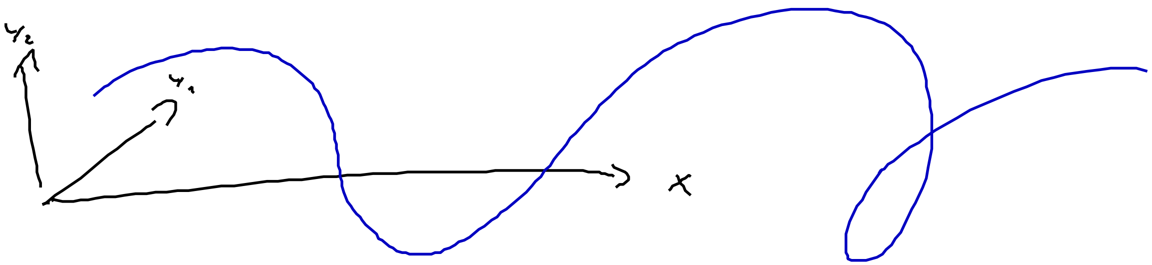
für alle $b \in \mathbb{R}$

$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (a, x)$

für alle $a \in \mathbb{R}$

$n = 1,\ m = 2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \big(\underbrace{f_1(x)}_{= y_1},\ \underbrace{f_2(x)}_{= y_2}\big)$$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ kann man sich als Bewegung eines Teilchens im Raum vorstellen

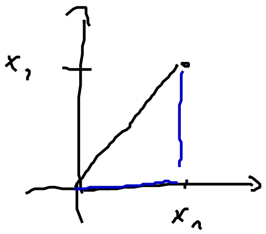
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kann man sich (z.T.) als Bewegungen der Ebene bzw. des Raums vorstellen (z.B. Drehung)

---

§2 Topologie des $\mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: „Länge von x" $= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

„euklidische Norm von x" $= \|x\|$



Abstand von x und y:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

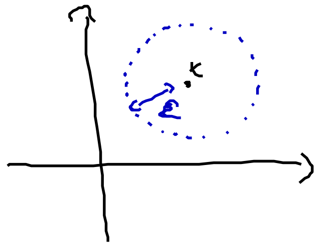
Nebenbemerkung: es gibt auch andere Längen- bzw. Abstandsbegriffe, z.B.

$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

$$B_\varepsilon(x) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon \}$$

offener ε-Ball um x



Def: $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls gilt:

für alle $x \in \mathcal{O}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{O}$

hängt von x ab!

A heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist

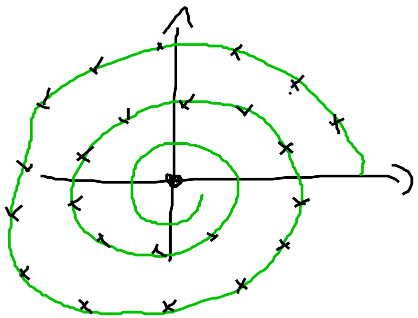
Konvergenz eine Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $y_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{R}^n$

$:\Leftrightarrow$ für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\| y_k - z \| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$

$y_k = (y_{k1}, \dots, y_{kn})$ $\Longleftrightarrow$ für alle i gilt: $(y_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen z_i

$\uparrow$ i-te Komponente von z

Bsp: a) $\left(\frac{1}{k} \sin(k), \frac{1}{k} \cos(k) \right)_{k \geq 1}$ konvergiert gegen $(0,0)$



b) $\left(k, \frac{1}{k} \right)_{k \geq 1}$ konvergiert nicht