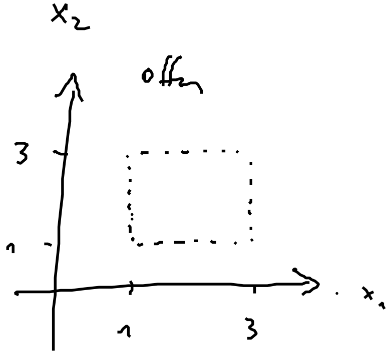
Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

Def.: $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen

$\Leftrightarrow$ für alle $x \in \mathcal{O}$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{O}$

$$B_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\|x - y\|}_{= d(x,y)} < \varepsilon \}$$



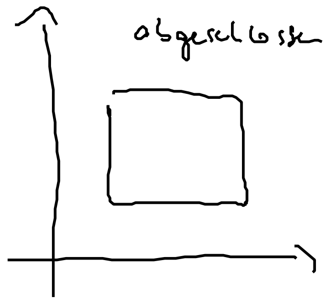
$\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1 < 3, 1 < x_2 < 3 \}$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen

$\Leftrightarrow$ für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in A$ gilt:

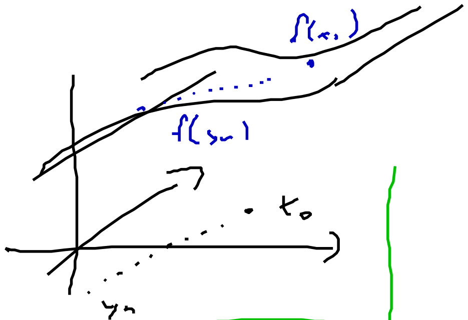
wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, dann ist auch $x \in A$



$\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x_1 \le 3, 1 \le x_2 \le 3 \}$

Def.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig in $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ für alle gegen x_0 konvergierenden Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x_0)$

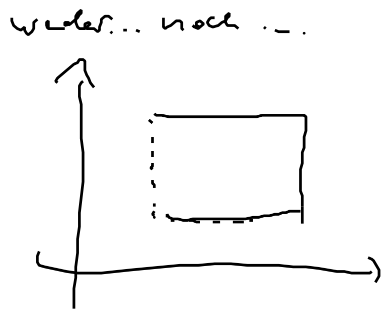


$\Leftrightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$B_\delta(x) \subseteq f^{-1}\big(B_\varepsilon(f(x_0))\big)$$

$\Leftrightarrow$ für jede offene Menge $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $f(x_0) \in \mathcal{O}$ gibt eine offene Menge $\mathcal{O}' \subseteq f^{-1}(\mathcal{O})$ mit $x_0 \in \mathcal{O}'$

$\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1 \le 3, 1 \le x_2 \le 3 \}$



anschauliche Interpretation: „keine Sprungstellen"

Beobachtung:

a) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i=1,\dots,m)$ stetig sind.

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alle Funktionen $f_a: y \longmapsto f(a,y)$ und $f_b: x \longmapsto f(x,b)$ $\left(\text{alle } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right)$ sind stetig!

klar für $a \neq 0$, $b \neq 0$

$\underline{a=0}$: $y \mapsto \begin{cases} \dfrac{0}{y^2} = 0 & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$ stetig!

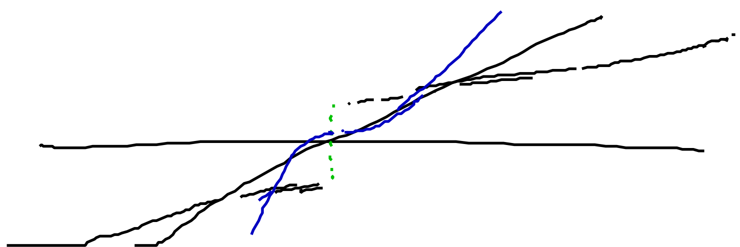
$\underline{b=0}$: $x \mapsto 0$ stetig

Betrachte die Folge $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$

Berechne $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \dfrac{(1/n)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{2}$

$f(0,0) = 0 \neq \frac{1}{2}$

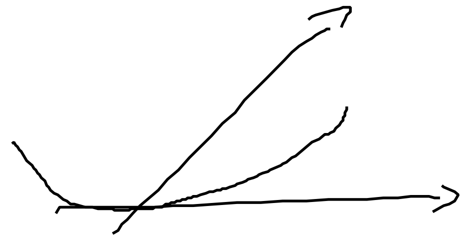
Also: f ist nicht stetig!



Bem: „Weg“: $g: [-\varepsilon, +\varepsilon] \to \mathbb{R}^2$ stetig

$0 \mapsto x_0$

$f \circ g: [-\varepsilon, +\varepsilon] \to \mathbb{R}$



f ist stetig in x_0 $\Longleftrightarrow$ für alle stetigen Wege g ist $f \circ g$ stetig in 0

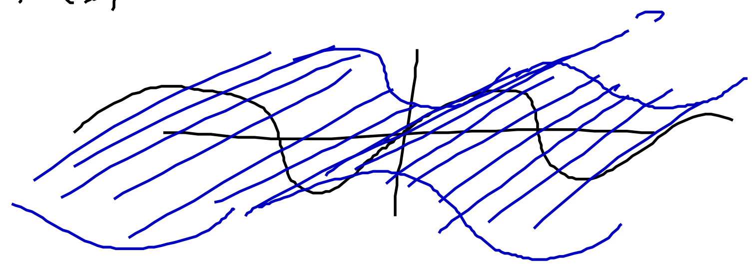
Bem: Stetig sind z.B.:

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x,y) \mapsto x+y$, $\quad (x,y) \mapsto x \cdot y$ stetig

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

$\rightsquigarrow$ $(x,y) \mapsto g(x)$ bzw $(x,y) \mapsto g(y)$ sind stetig

$s(x) = \sin(x)$



c) Komposition stetiger Funktionen ist stetig.

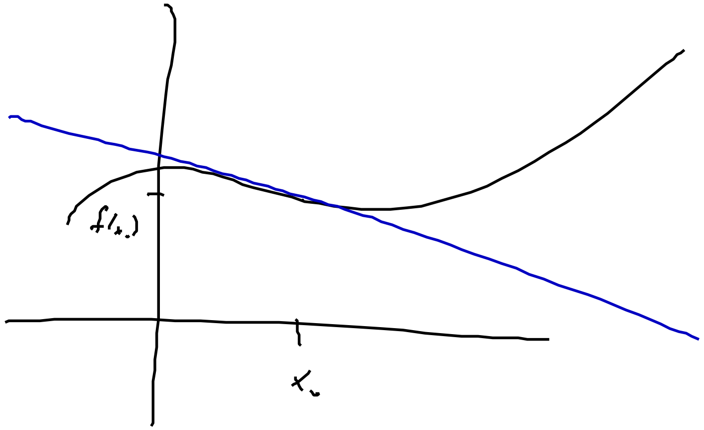
z.B. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \mapsto \left(e^x \cdot (\sin z)^2 \cdot y,\ 3y^3,\ 2x^2y^3z - xyz\right)$ stetig

§3 Differenzierbarkeit

Erinnerung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

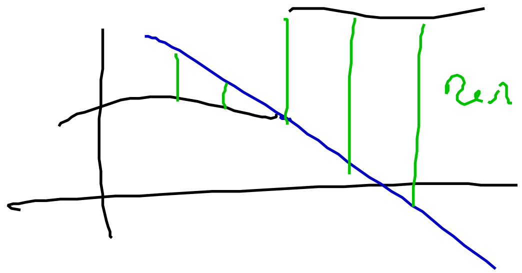
$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}_{\text{Tangentengleichung}} + \overset{\text{Rest}}{R(x)}$$



Bem: für jede Zahl a kann man

$f(x) = f(x_0) + a\cdot(x - x_0) + \text{Rest}$ schreiben; allerdings verhält sich der Rest in der Regel nicht besonders klein.

Stetigkeit von f in x_0 $\iff$ $R(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$



Differenzierbarkeit von f in x_0 $\iff$ $R(x)$ geht schneller gegen 0 als die Funktion x

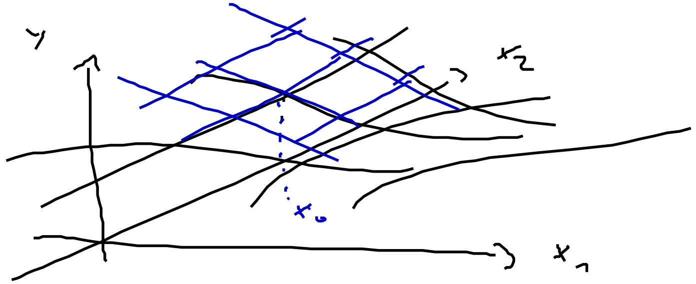
d.h. $\dfrac{R(x)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Zunächst nur $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x)$$

wobei $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{\| x - x_0 \|} = 0$.



der Graph von A an die Stelle $(x_0, f(x_0))$ verschoben ist die Tangentialebene am Graph von f am Punkt $(x_0, f(x_0))$

A lässt sich durch eine $(1 \times n)$-Matrix beschreiben, $A(x - x_0)$ wird dann zu

$$A \cdot (x - x_0)$$

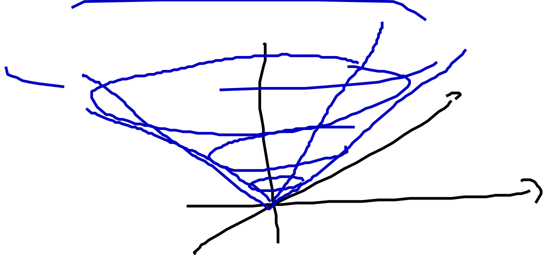
$(1 \times n)$-Matrix Zeilenvektor

Spaltenvektor

Wie sehen die Einträge von A bzgl. der Standardbasis aus?

Notation: Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann schreibt man für die lineare Abbildung A aus der Definition $f'(x_0)$ oder $Df(x_0)$. Diese Ableitung heißt auch totale Ableitung von f an der Stelle x_0; die Matrix der totalen Ableitung heißt Jacobi-Matrix.

Bsp: a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2}$



Graph der Funktion f ist Kegel mit Spitze nach unten in $(0,0)$

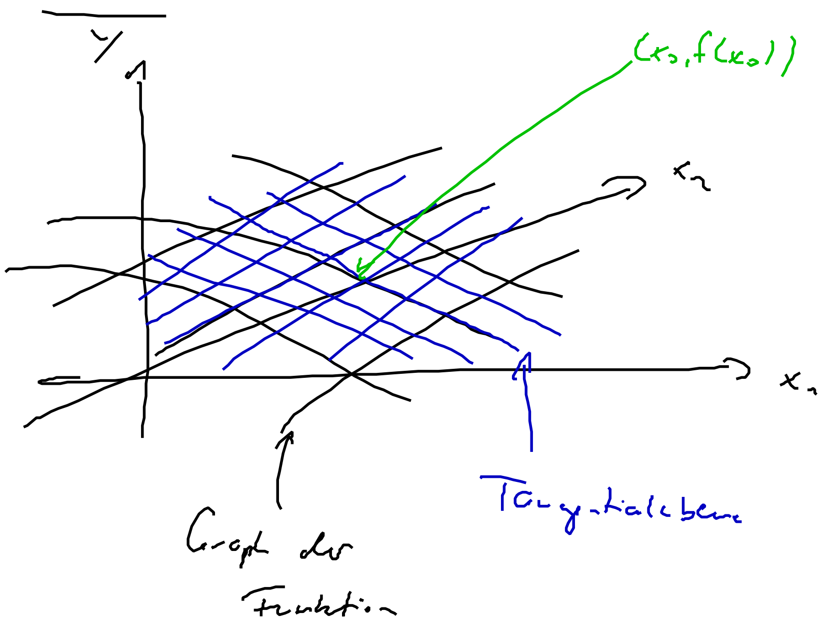
- nicht differenzierbar in $(0,0)$

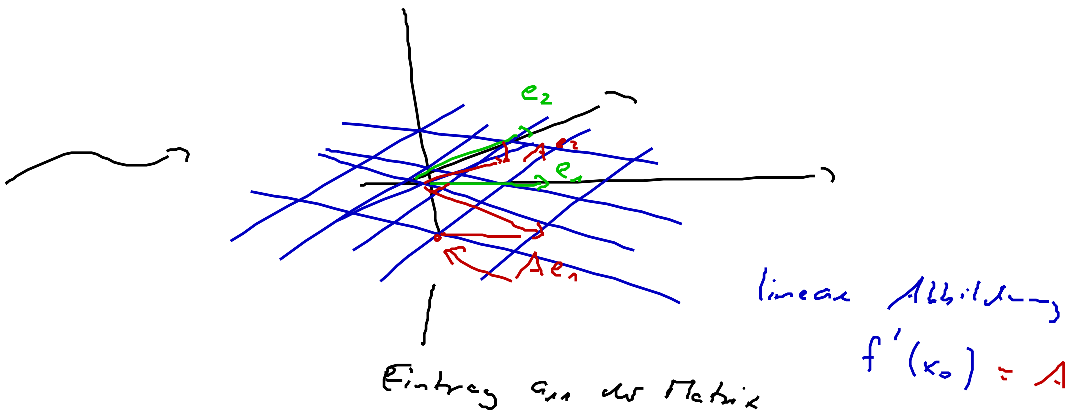
  (falls man es mit der linearen Abbildung „konstant Null" probieren würde, hätte der Rest $R(x)$ Norm 1)

- in allen anderen Punkten ist f differenzierbar

b) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

ist überall differenzierbar, auch in $(0,0)$, Tangentialebene in $(0,0)$ ist horizontal

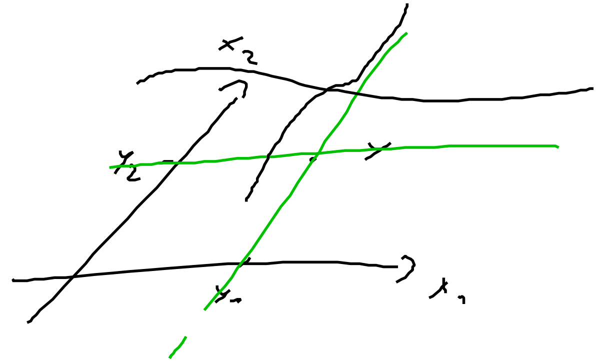




$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

i-te partielle Funktion durch y: $\qquad x \longmapsto f\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ x \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



Wenn f in y (total) differenzierbar ist, dann sind die partiellen Funktionen in y_i differenzierbar.

Die Ableitungen der partiellen Funktionen heißen <u>partielle Ableitungen</u> $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

↑ Ableitung der i-ten partiellen Funktion bzw. i-te partielle Ableitung

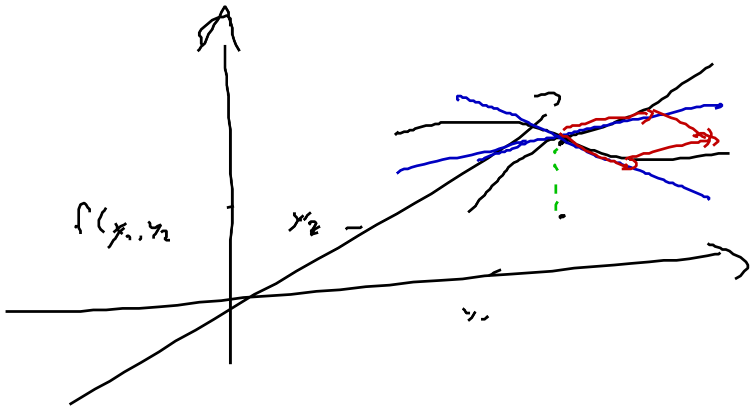
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = \text{i-te partielle Ableitung an der Stelle } y.$$

Dies sind die Einträge der Jacobi-Matrix an der Stelle y,

d.h. $$f'(y) = Df(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{als Matrix}}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(y) \right)$$

Für $f: \mathbb{R}^n \to \underline{\mathbb{R}}$ heißt dies auch der <u>Gradient</u>

$\left(\operatorname{grad} f(x_0) \text{ bzw. } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nabla}}}{\nabla} f(x_0) \right)$



die beiden Tangenten an die partiellen Funktionen spannen die Tangentialebene auf.

$$f'(y)\circ(y'-y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(y)\right)\cdot\begin{pmatrix} y_1'-y_1\\ y_2'-y_2\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(y)\cdot(y_1'-y_1)}_{\text{Änderung in } x_1\text{-Richtung}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}(y)\,(y_2'-y_2)}_{\text{Änderung in } x_2\text{-Richtung}}$$

Achtung: Wenn f total differenzierbar ist, dann existieren die partiellen Ableitungen, diese bilden die Jacobi-Matrix und „berechnen" damit die totale Ableitung.

Aber: die Existenz der partiellen Ableitungen garantiert noch nicht die totale Ableitbarkeit! (Übung!)

Zusammenhänge:

f stetig partiell differenzierbar in y

d.h. in einer Umgebung $B_\varepsilon(y)$ von y ist f partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen sind in dieser Umgebung stetige Funktionen

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

f stetig in y $\quad \Leftarrow \quad \not\Rightarrow \quad$ f total differenzierbar in y

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

f partiell differenzierbar in y