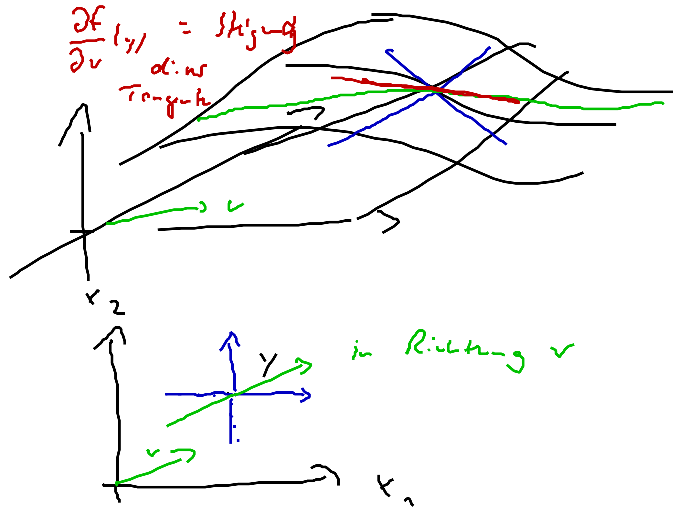
Hinweis: Sondertutorium zur Vorbereitung der Nachklausur Mathe I

Bem: differenzierbar = ableitbar

Differenzierbarkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$



Def: Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$

$$D_v f(y) = \frac{\partial f}{\partial v}(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(y+\varepsilon \cdot v) - f(y)}{\varepsilon}$$

(falls man die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ nennt, so ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(y)$)

Satz: (a) f total differenzierbar in y $\Rightarrow$ alle Richtungsableitungen von f in y existieren
$\not\Leftarrow$

$\Updownarrow$

(f ist in y „längs aller Wege" differenzierbar, für alle differenzierbaren Fkt. $g: (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $g(0) = y$ ist $f \circ g: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ in 0 differenzierbar)

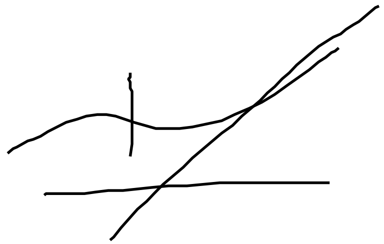
(b) $$\frac{\partial f}{\partial v}(y) = \operatorname{grad} f(y) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) \cdot v_i$$

Skalarprodukt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(y)\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Also: $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(y)\right| = \|\operatorname{grad} f(y)\| \cdot \|v\| \cdot |\cos \alpha|$

wobei α = Winkel zwischen $\operatorname{grad} f(y)$ und v



Also: größte Steigung hat f in y in Richtung $\operatorname{grad} f(y)$!

Allgemeiner Fall: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$

Def (analog zum Fall $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

f ist (total) differenzierbar in $y \in \mathbb{R}^n$,
falls es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt,
mit $f(x) = f(y) + A(x-y) + R(x)$

und $\lim\limits_{x \to y} \dfrac{R(x)}{\|x-y\|} = 0$

A heißt (totale) Ableitung und wird $f'(y)$ oder $Df(y)$ geschrieben.

(Bem: falls A existiert, so ist A eindeutig bestimmt)

A wird dargestellt durch die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(y) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(y) \end{pmatrix}$$

(die Zeilenvektoren der Matrix sind die Gradienten der Komponentenfunktionen)

Satz: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann in y differenzierbar,
wenn jede Komponentenfunktion f_i in y differenzierbar ist.

Ableitungsregeln

Linearität: Wenn $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in y differenzierbar sind, dann auch $f+g$ und $r \cdot f$ für $r \in \mathbb{R}$

und es gilt $D(f+g)(y) = Df(y) + Dg(y)$

$D(r \cdot f)(y) = r \cdot Df(y)$

Produktregel: $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in y differenzierbar, dann auch $f \cdot g$

und $D(f \cdot g)(y)(x) = f(y) \cdot Dg(y)(x) + g(y) \cdot Df(y)(x)$

Kettenregel: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in y

$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ — " — in $f(y)$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ — " — in y und $D(g \circ f)(y) = D(g)(f(y)) \circ Df(y)$

Verknüpfung linearer Abb. bzw. Matrixprodukt der Jacobi-Matrizen

Umkehrabbildung: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv, differenzierbar in y, f^{-1} stetig in $f(y)$, $\det Df(y) \neq 0$ $\Rightarrow$ f^{-1} differenzierbar in $f(y)$ und

$Df^{-1}(f(y)) = \left(Df(y)\right)^{-1}$

(Bem: es gibt allgemeinere Aussagen dieser Art)

§ 4 Höhere Ableitungen

Höhere partielle Ableitungen

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

überall differenzierbar,

für $y \in \mathbb{R}^n$ ist $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) \in \mathbb{R}$, d.h. $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Nun kann man nach (partieller) Differenzierbarkeit von $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ fragen, etc.

Man bekommt ggf. zweite, dritte, ..., n-te partielle Ableitungen von f

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} =: g \qquad \frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \quad \left(= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right)$$

Achtung: bei manchen Autoren auch umgekehrte Reihenfolge!

allgemein $\frac{\partial^n f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}}$; Schreibweise $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

Satz von Schwarz: Wenn f zweimal differenzierbar (Definition hiervon folgt!)

dann $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$

allgemein: Wenn f ℓ-mal differenzierbar, kommt es bei ℓ-fachen partiellen Ableitungen nicht auf die Reihenfolge an!

Def.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

Die Hesse-Matrix von f ist die $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Satz von Schwarz:
Hesse-Matrix ist symmetrisch!

Bsp: $f(x,y) = 2x^3 \cdot y^2 + 3x^2 y + \sin(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 \cdot y^2 \cdot 3x^2 + 3y \cdot 2x = 6x^2y^2 + 6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 \cdot 2y + 3x^2 + \cos(y) = 4x^3y + 3x^2 + \cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12xy^2 + 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2y + 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 12x^2y + 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^3 - \sin(y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = 12x^2$$

Höhere totale Ableitungen?

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$y \in \mathbb{R}^n$

n·m dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$f'(y) = Df(y) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{n\cdot m}$$

"

Menge der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\cong$ Standardbasis

$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\qquad$ $\mathbb{R}^{n\cdot m}$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{z.B.}} (x_{11} \dots x_{1n}, x_{21} \dots x_{2n}, \dots, x_{m1} \dots x_{mn}) \in \mathbb{R}^{n\cdot m}$$

also kann man f' auffassen als Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\cdot m}$

Jetzt kann man sich überlegen: Ist f' stetig?
Ist f' differenzierbar? etc.

$\rightsquigarrow$ bekommt Begriffe von k-mal differenzierbar
k-mal stetig differenzierbar

<u>Bem:</u> f ist k-mal stetig differenzierbar (auf $O \subseteq \mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow$ f ist k-mal stetig partiell differenzierbar (auf O)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f' : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$f'' : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \mathrm{Bilin}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

bilineare Abbildungen

$\mathrm{Abb}(M_1, \mathrm{Abb}(M_2, M_3))$
$\cong \mathrm{Abb}(M_1 \times M_2, M_3)$

$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist bilinear

sodass

$$g(x_1 + x_2, y) = g(x_1, y) + g(x_2, y)$$

$$g(x, y_1 + y_2) = g(x, y_1) + g(x, y_2)$$

$$g(rx, y) = g(x, ry) = r \cdot g(x, y)$$