höhere Ableitung

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\rightsquigarrow \quad f': \mathbb{R}^n \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{n\cdot m}$

$\quad f'': \mathbb{R}^n \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$

$$\cong \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

bilinear Abbildungen

allgemein

$$f^{(k)}: \mathbb{R}^n \to \mathrm{Mult}(\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ mal}}, \mathbb{R}^m)$$

multilinear Abbildungen

Spezialfall $m = 1$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

Ableitung im Punkt $y \in \mathbb{R}^n$: $\quad f'(y): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$v \mapsto f'(y)\cdot v = \operatorname{grad} f(y) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\cdot v_i$$

Richtungsableitung in Richtung v

$$f''(y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

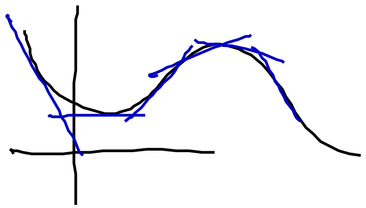
$$(v, w) \mapsto \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(y)\cdot v_i \cdot w_j$$

Änderung der Richtungsableitung nach v, wenn man sich in Richtung w bewegt

spezielle Situation $v = w$

$$f''(y)(v,v) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(y)\cdot v_i \cdot v_j$$

„Richtungskrümmung in Richtung v"



$$f''(y)(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y) \cdot v_i \cdot v_j = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(y) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(y) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(y) & \dots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f an der Stelle y

$$= v^T \cdot Hf(y) \cdot v$$

v als Spaltenvektor

(allgemeiner: $f''(y)(v,w) = w^T \cdot Hf(y) \cdot v$)

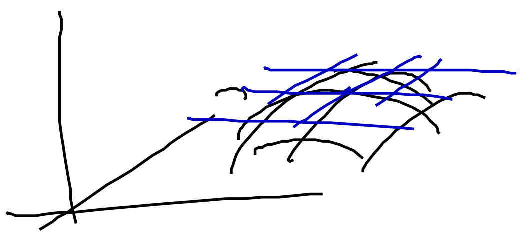
Lokale Extrema

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>Def</u> $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein lokales Maximum von f, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit
(bzw. lokales Minimum)

$$f(x) > f(y) \text{ für alle } y \in B_\varepsilon(x),\ y \neq x$$
$$(\text{bzw. } f(x) < f(y))$$

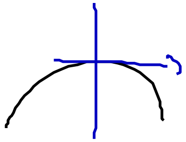
<u>Satz</u>: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und x ein lokales Maximum bzw. Minimum.
Dann ist $f'(x) = 0$ (d.h. alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$).



Die Umkehrung gilt nicht!
Punkte x mit $f'(x) = 0$ heißen kritische Punkte.
Kritische Punkte, die keine lokalen Maxima bzw. Minima sind, heißen Sattelpunkte.

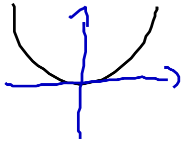
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

lokales Max.



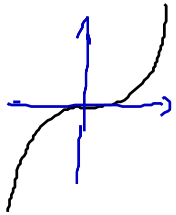
$x \mapsto -x^2$

lokales Minimum

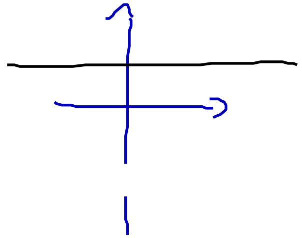


$x \mapsto x^2$

Sattelpunkt

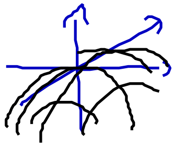


$x \mapsto x^3$

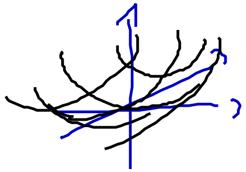


$x \mapsto 1$

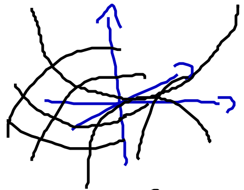
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



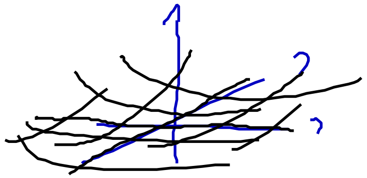
$(x,y) \mapsto -x^2 - y^2$



$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$

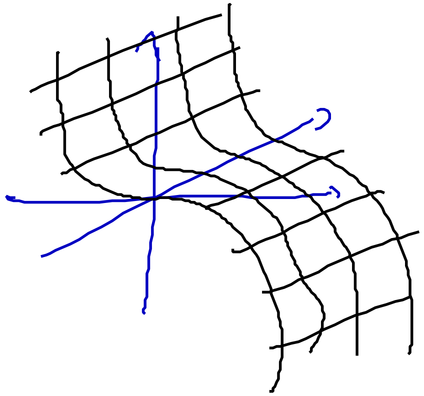


$(x,y) = x^2 - y^2$



$(x,y) \mapsto x^2 \cdot y^2$

verschiedenste Arten von Sattelpunkten!



$(x,y) \mapsto -x^3$

Satz: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zweimal differenzierbar, $y \in \mathbb{R}^n$ kritischer Punkt

- Falls die Hesse-Matrix von f im Punkt y positiv definit ist, dann ist y ein lokales Minimum
- — " — negativ definit — " — lokales Maximum
- — " — indefinit — " — Sattelpunkt

$H = Hf(y)$ ist positiv definit, falls $v^T \cdot H \cdot v > 0$ für alle $v \neq 0$

negativ definit $v^T \cdot H \cdot v < 0$

indefinit, falls es v_1, v_2 gibt mit $v_1^T \cdot H \cdot v_1 > 0$, $v_2^T \cdot H \cdot v_2 < 0$

Achtung: falls H weder positiv noch negativ definit ist, muss H noch lange nicht indefinit sein! (Bsp $(x,y) \mapsto x^2 \cdot y^2$ im Punkt $y = (0,0)$)

Hurwitz-Kriterium

symmetrische quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, \, 1 \le j \le n}$ über $\mathbb{R}$ ist positiv definit, falls

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(a_{11}) > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\det(A) > 0$$

A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ $-A$ positiv definit

Bsp: ① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2$

$f'(x,y) = (2x, 2y)$

kritische Punkte: $(0,0)$

Hesse-Matrix in $(0,0)$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(unabhängig vom Ableitungspunkt)

Hurwitz? $\det(2) = 2 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$ also ist $Hf(0,0)$ positiv definit, d.h. $(0,0)$ ist (lokales) Minimum.

$v^T \cdot Hf(0,0) \cdot v = 2v_1^2 + 2v_2^2 > 0$ für $(v_1,v_2) \neq (0,0)$

② $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$

$f'(x,y) = (2x, -2y)$

kritische Punkte: $(0,0)$

Hesse-Matrix in $(0,0)$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$(v_1,v_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_1^2 - 2v_2^2$$

für $(v_1,v_2) = (1,0)$ kommt $2\cdot 1^2 - 2\cdot 0^2 = 2 > 0$ heraus

für $(v_1,v_2) = (0,1)$ kommt $2\cdot 0^2 - 2\cdot 1^2 = -2 < 0$ heraus

$\Big\}$ $Hf(0,0)$ ist indefinit!

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 \cdot y^2$

$f'(x,y) = (2xy^2, 2x^2y)$

kritische Punkte $(x,0)$, $(0,y)$ für x,y

betrachte Punkt $(0,0)$: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ weder positiv noch negativ definit noch indefinit!

$v^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v = 0$

$(n\times n)$-

<u>Satz:</u> Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar bzgl. einer Orthonormalbasis.

D.h. es gibt eine Basis vom $\mathbb{R}^n$, $v_1, \dots, v_n$ mit

- $\|v_1\| = \dots = \|v_n\| = 1$
- die v_i stehen paarweise senkrecht aufeinander (d.h. $v_i \cdot v_j = 0$ für $i \neq j$)
- die Matrix A hat bzgl. dieser Basis Diagonalgestalt,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_i sind die Eigenwerte

<u>Anwendung auf Hessematrix:</u>

es gibt eine Orthonormalbasis so, dass $Hf(y)$ die Gestalt $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ hat bzgl. dieser Basis.

v_i i-te Vektor dieser Basis:

$$v_i^T \cdot Hf(y) \cdot v_i = \lambda_i \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Komponente von } v_i}}{1^2} = \lambda_i = \text{„Richtungskrümmung in Richtung } v_i\text{"}$$

$Hf(y)$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$

Falls $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ (evtl. Basis umordnen), dann ist v_1 die Richtung mit der größten Richtungskrümmung, v_n die Richtung mit der kleinsten Richtungskrümmung.

$Hf(y)$ ist negativ definit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i < 0$

$Hf(y)$ ist indefinit $\Leftrightarrow$ es gibt positive und negative λ_i

Wie bekommt man die Eigenwerte einer Matrix?

Fall (2×2)-Matrizen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{gegeben}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{gesucht}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}}_{\text{gesucht}} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

λ ist dann Eigenwert

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right]}_{= \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, d.h. $\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \in \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$

Also: $\boxed{\lambda \text{ ist Eigenwert von } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow}$ $\operatorname{Kern} \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \neq \{0\}$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - c\cdot b$$

$$= ad - \lambda d - \lambda a + \lambda^2 - cb$$

$$= \boxed{\lambda^2 - 2(a+d)\lambda + ad - cb = 0}$$

Übung: lokale Extrema bestimmen von

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 5x^2 + 4xy + 2y^2$