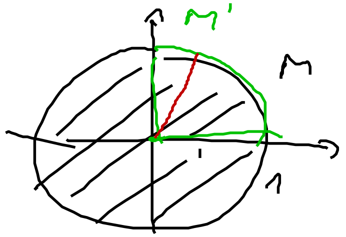
§5 Höherdimensionale Integration (Beginn Tafel, hier Fortsetzung)

$$\longleftarrow \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\,dx$$

Bsp 4 Flächenberechnung des Kreises

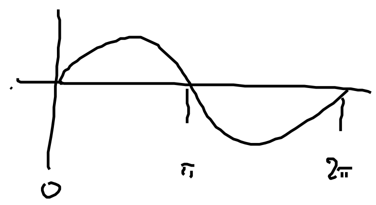


$$\int_M 1\,dxy = \text{Fläche des Kreises} = 4\cdot\int_{M'} 1\,dxy$$

t = Winkel zur x-Achse!

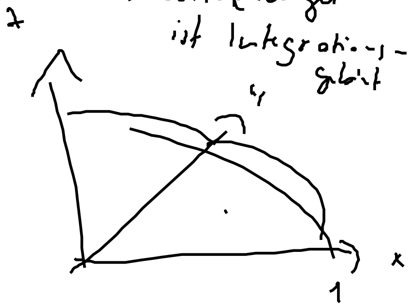
$$\int_{M'} 1\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1\,dy\,dx = \int_0^1 y\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{\substack{\text{Substitution}\\ x=\sin t}}{=} \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt \overset{\substack{\text{Formel-}\\ \text{sammlung}}}{=} \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}-0 = \frac{\pi}{4}$$



analog Kugelvolumen

Achtelkugel ist Integrationsgebiet



$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx = \ldots$$

2. Art von Integral: Weg- oder Kurvenintegrale

Variante 1

$g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar

„Weg im $\mathbb{R}^n$"

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

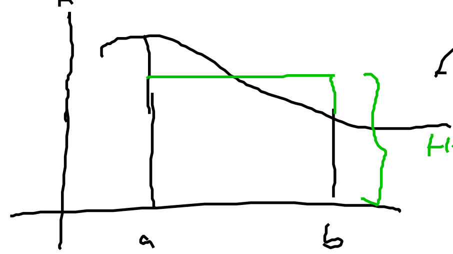
„Integral von f längs des Weges g"

„Mittelwert von f auf g"

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot \underbrace{\|g'(t)\|}_{=\sqrt{g_1'(t)^2 + \dots + g_n'(t)^2}} \, dt$$

Spezialfall $f = 1$

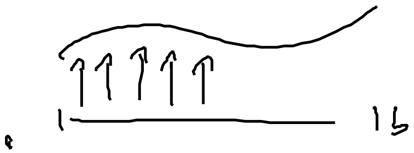
$$\int_a^b \|g'(t)\| \, dt$$ „Bogenlänge" von g

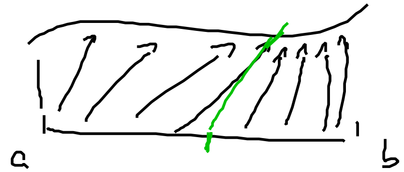


$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

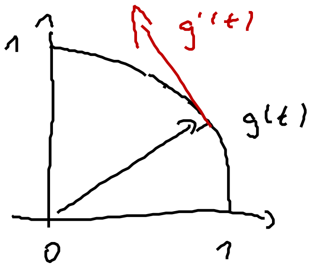
Höhe $= \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

$\int_a^b f(x)\,dx$ ist eine Art „Mittelwert" der Werte $f(x)$ für $x \in [a,b]$





Beispiel



$$g: [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$
$$g'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Bogenlänge: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \|g'(t)\| \, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$

Bogenlängenparametrisierung: der Weg wird mit „Geschwindigkeit" 1 durchlaufen (d.h. $\|g'(t)\| = 1$ für alle t)

Bogenlänge = Intervalllänge

andere „Parametrisierung" des gleichen Wegs $\quad h: [0,1] \to \mathbb{R}^2$
$$t \mapsto \left(1-t, \sqrt{1-(1-t)^2}\right)$$

„am Anfang schneller als am Schluss"

$$h'(t) = \left(-1, \frac{1}{2} \frac{2(1-t)}{\sqrt{1-(1-t)^2}}\right)$$
(?)

$\|h'(t)\|$ hängt von t ab

$$\int_0^1 \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1-t}{\sqrt{1-(1-t)^2}}\right)^2} \, dt = (\text{Rechnung}) = \frac{\pi}{2}$$

Variante 2

$g: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar

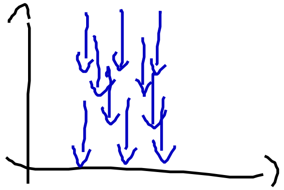
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetige Funktion „Vektorfeld"

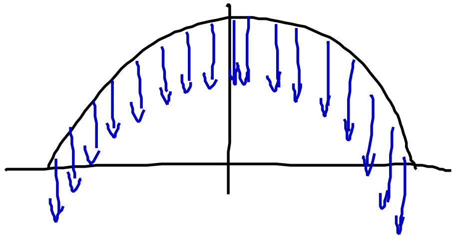
$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$$

$=$ „Arbeit" für die Bewegung eines Teilchens längs g in dem Kraftfeld f

($\cdot$: Skalarprodukt)

Bsp: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, konstant $= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$





$g: [-1,1] \to \mathbb{R}$

$t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$

$$\int_{-1}^{1} f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} (0,-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0 \quad \text{(da die Funktion ungerade)}$$

nicht gemacht:

Vektorfelder : $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Skalarfelder $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

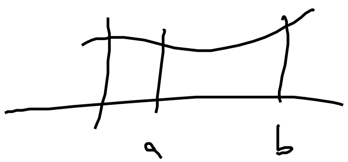
(Bezeichnungen aus der Physik)

Satz von Stokes

Idee unter bestimmten Bedingungen gilt:

$$\int_{\text{Gebiet}} f' = \int_{\text{Rand des Gebiets}} f$$

Spezialfall: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



falls genügend oft stetig differenzierbar, gibt es „Differentialoperatoren"

grad

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Skalarfeld

$\operatorname{grad} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

„Gradientenfeld"

Divergenz $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x)$$

Skalarfeld

Rotation (misst die Verwirbelung eines Vektorfelds)

jede Menge Abhängigkeiten und schöne Formeln