Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Lineare Unabhängigkeit.** Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig über $\mathbb{R}$? Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig über $\mathbb{F}_3$ (dem Körper mit 3 Elementen — siehe 2. Übungsblatt)?
$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

2. **Spiegelungen.** Sei $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ein fest gewählter Vektor, und sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung mit Spiegelungsachse
$$\left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$
Geben Sie die Matrix für φ (bzgl. der Standardbasis) an.

   Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Projektion der Standardbasisvektoren auf die Spiegelungsachse. Sie können annehmen, dass $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ die Länge 1 hat, also dass $x^2 + y^2 = 1$ gilt.

3. **Komplexe Zahlen als $\mathbb{R}$-Vektorraum.** Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lassen sich als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen: Wir können $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, indem wir eine komplexe Zahl $c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$) als Vektor $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ schreiben.

   Beweisen Sie, dass die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist. Durch welche Matrix wird φ_z beschrieben, wenn man $\mathbb{C}$ wie oben mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert?

4. **Basiswechsel.** Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten und vom Grad höchstens 4. Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis $1, X, X^2, X^3, X^4$ und $\mathcal{B}'$ die Basis der „fallenden Faktoriellen" $1, X, (X)_2, (X)_3, (X)_4$, wobei $(X)_n := X\,(X-1)\,\cdots\,(X-n+1)$.

   Bestimmen Sie die beiden Basiswechselmatrizen und für die Ableitung $\varphi := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ die darstellenden Matrizen ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}'}$, ${}_{\mathcal{B}'}\varphi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}'}\varphi_{\mathcal{B}'}$. (Beide Basen sollen dafür in der angegebenen Reihenfolge geordnet sein.)

Abgabe am 21.5.2012 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung