

Verantwortlich für die Übungen:

Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Orthogonales Komplement.** Sei U eine Teilmenge von \mathbb{R}^n .

(a) Beweisen Sie, dass

$$U^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist und dass $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Wenn U selbst ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ist, dann gilt $\dim U + \dim U^\perp = n$.

2. **Binärer Hamming-Code.** Stellen Sie für den binären $[n, k, d] = [15, 11, 3]$ -Hamming-Code die Erzeugermatrix G und die Prüfmatrix H in der Form

$$G = (\text{Id}_k \mid A) \quad H = (-A^T \mid \text{Id}_{n-k})$$

auf. Kodieren Sie den Vektor

$$(1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1).$$

Fälschen Sie das Ergebnis ab, indem Sie ein beliebiges Bit verändern. Berechnen Sie anschließend das Syndrom und überprüfen Sie, dass es zum abgeänderten Bit korrespondiert (d.h. in der entsprechenden Spalte der Matrix H auftaucht).

3. **Lineare Abbildungen der Ebene.** Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine beliebige *invertierbare* lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass sich φ als Hintereinanderausführung einer Drehung, einer Scherung an der x -Achse und einer Streckung an den Achsen beschreiben lässt. Berechnen Sie dies explizit.

Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Matrix, die die Abbildung φ beschreibt. Die Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

erfüllt die Eigenschaft $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie dies nach. Bezeichnen Sie die Spaltenvektoren von A^{-1} mit v_1 und v_2 .

Bitte wenden!

(b) Bestimmen Sie die Matrix $D = \begin{pmatrix} e & f \\ -f & e \end{pmatrix}$ (mit $e^2 + f^2 = 1$) einer Drehung, die v_1 auf die x -Achse dreht. Seien $w_1 := D \cdot v_1$ und $w_2 := D \cdot v_2$. Das heisst also: w_1 liegt auf der x -Achse!

(c) Bestimmen Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ einer Scherung entlang der x -Achse, die w_2 auf die y -Achse schert. Seien $x_1 := C \cdot w_1$ und $x_2 := C \cdot w_2$.

(d) Bestimmen Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ einer Streckung an den Achsen, die x_1 auf $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und x_2 auf $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet.

(e) Begründen Sie, dass $A = B \cdot C \cdot D$ gilt.

4. **Orthogonale Projektion.** Sei v_1, \dots, v_n eine **Orthonormalbasis** des \mathbb{R}^n , also eine Basis des \mathbb{R}^n , für die gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Anders ausgedrückt, die Vektoren v_1, \dots, v_n stehen paarweise aufeinander senkrecht und haben die Länge 1.

Beweisen Sie, dass die i -te Koordinate eines Vektors v in dieser Basis gerade das Skalarprodukt $\langle v, v_i \rangle$ ist, mit anderen Worten, dass gilt:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i.$$

5. **Zusatzaufgabe: Orthogonale Abbildungen der Ebene. (4 Extrapunkte)** Bestimmen Sie die Matrizen aller Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die das Skalarprodukt invariant lassen.

Abgabe am 18.6.2012 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung