

Verantwortlich für die Übungen:

Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Der abstrakte Funktionsbegriff.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion (Abbildung) zwischen beliebigen Mengen. Erwähne die folgenden Definitionen:

- $f$  heisst **injektiv**, falls für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$  gilt, dass  $x_1 = x_2$ . Mit anderen Worten: Jedes Element aus  $Y$  hat höchstens ein Urbild unter  $f$ .
- $f$  heisst **surjektiv**, falls für jedes  $y \in Y$  ein  $x \in X$  existiert, so dass  $f(x) = y$ . Mit anderen Worten: Jedes Element aus  $Y$  hat mindestens ein Urbild unter  $f$ .
- $f$  heisst **bijektiv**, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist. Mit anderen Worten: Jedes Element aus  $Y$  hat genau ein Urbild unter  $f$ .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

- (a)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , gegeben durch  $f(z) = 100 - z$ ,
- (b)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , gegeben durch  $f(z) = z^2$ ,
- (c)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , gegeben durch  $f(z) = z^3$ ,
- (d)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , gegeben durch  $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z & \text{falls } z \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}(z - 1) & \text{falls } z \text{ ungerade,} \end{cases}$
- (e)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $f(z) = z^3$ ,
- (f)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $f(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$ .

*Zusatzfrage: Sei  $X$  eine endliche Menge. Kann es eine Funktion  $f : X \rightarrow X$  geben, die injektiv, aber nicht surjektiv ist?*

2. **Injektive Abbildungen.** Seien  $X, Y, Z$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Sind  $f$  und  $g$  injektiv, so ist  $g \circ f$  injektiv.
- (b) Ist  $g \circ f$  injektiv, so ist  $f$  injektiv.
- (c) Sind  $f$  und  $g \circ f$  injektiv, so ist  $g$  injektiv.

Hier bedeutet  $g \circ f$  die Hintereinanderausführung von Funktionen; es wird zuerst  $f$  und dann  $g$  angewendet. Die scheinbar umgekehrte Schreibweise kommt von der definierenden Formel  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ .

*Zusatz: Formulieren Sie für die richtigen Aussagen oben Analoga für "surjektiv".*

3. **Induktionsbeweis.** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

*Bitte wenden!*

4. **Mengenoperationen.** Sei  $X$  eine Menge,  $A, B, C \subset X$  Teilmengen und bezeichne  $(\cdot)^c$  das Komplement einer Teilmenge, also z.B.  $A^c = X \setminus A$ . Zeigen Sie:

(a)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  (Gesetz von de Morgan)

(b)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

*Hinweis: Für Aufgabenteil (b) können Sie Aufgabenteil (a) und  $A \setminus B = A \cap B^c$  benutzen.*

*Präsenzaufgaben zu lösen in den Übungen vom 27.-30.4.2015*