Dr. Juan Diego Caycedo — Mathematik II für Informatiker — Sommer 2015
Übungsblatt 4

Verantwortlich für die Übungen:
Dr. Fritz Hörmann (fritz.hoermann@math.uni-freiburg.de)

1. **Lineare Unabhängigkeit.** Sind die folgenden Vektoren (als Vektoren in $\mathbb{R}^3$) linear unabhängig über $\mathbb{R}$? Sind die folgenden Vektoren (als Vektoren in $(\mathbb{F}_3)^3$) linear unabhängig über $\mathbb{F}_3$ (dem Körper mit 3 Elementen — siehe 2. Übungsblatt)?

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

2. **Lineare Abhängigkeit.** Die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ müssen linear abhängig sein, da es mehr als 3 sind. In diesem Fall sind sogar je 3 der Vektoren linear unabhängig, bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Finden Sie für jeden der 4 Vektoren eine Darstellung als Linearkombination der übrigen 3 Vektoren.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

3. **Alternative Charakterisierung von linearer Unabhängigkeit.** Seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren eines k-Vektorraumes V. Zeigen Sie: $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für jedes $1 \leq i \leq n$ der Vektor v_i linear unabhängig von den Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}$ ist, d.h. sich nicht in der Form

$$v_i = \sum_{j<i} \alpha_j v_j$$

mit $\alpha_j \in k$ schreiben lässt.

Bitte wenden!

4. **Steinitzsche Austauscheigenschaft (8 Punkte).**

   Sei X eine Teilmenge eines k-Vektorraumes V. Wir können X den von X erzeugten Unterraum $\langle X\rangle \subseteq V$ aller von X linear abhängigen Vektoren zuordnen. Mit anderen Worten $v \in \langle X\rangle$ genau dann, wenn $x_1, \ldots, x_n \in X$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ existieren, so dass $v = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. Die Abbildung $X \mapsto \langle X\rangle$ ist eine Funktion, die Teilmengen von V in Teilmengen von V (ein Unterraum ist insbesondere auch eine Teilmenge) abbildet, also eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(V) & \to & \mathcal{P}(V) \\ X & \mapsto & \langle X\rangle \end{array}$$

   Hier bezeichnet $\mathcal{P}(V)$ die Potenzmenge von V, also die Menge aller Teilmengen von V.

   Beweisen Sie, dass $X \mapsto \langle X\rangle$ die folgenden Eigenschaften hat[1]:

   (a) $X \subseteq \langle X\rangle$ für alle $X \in \mathcal{P}(V)$.

   (b) $\langle X\rangle = \langle\langle X\rangle\rangle$ für alle $X \in \mathcal{P}(V)$.

   (c) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X\rangle \subseteq \langle Y\rangle$ für alle $X, Y \in \mathcal{P}(V)$.

   (d) (Steinitzsche Austauscheigenschaft): Für alle $v, w \in V$ und $X \in \mathcal{P}(V)$ gilt:
   Falls $v \in \langle X \cup \{w\}\rangle \setminus \langle X\rangle$, dann ist $w \in \langle X \cup \{v\}\rangle \setminus \langle X\rangle$.

Abgabe bis Fr 15.5.2015, 10:00 in die Kästen im Erdgeschoss des Instituts für Informatik, Gebäude 51.

---

[1] Man nennt so eine Zuordnung einen **Abschlussoperator mit der Steinitzschen Austauscheigenschaft.**