Dr. Fritz Hörmann — Projektseminar Algebraische Zahlentheorie
Sommer 2012
Übungsblatt 1

---

1. **Naive Idele.** Bezeichne $\mathbb{A}_K^*$ die Gruppe der Einheiten in $\mathbb{A}_K$. Beweise:
   (a) $\mathbb{A}_K^*$ ist weder abgeschlossen noch offen.
   (b) Die Abbildung $\mathbb{A}_K^* \to \mathbb{A}_K^* : x \mapsto x^{-1}$ ist nicht stetig.

2. **Die Topologie von $\mathbb{Q}_2$.** Die Cantormenge ist diejenige Teilmenge $C \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$, welche übrigbleibt, wenn wir sukzessive aus $[0,1]$ wie folgt offene Teilintervalle löschen:
   1. Schritt: Das Intervall $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$
   2. Schritt: Die Intervalle $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ und $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$.
   ...
   In jedem Schritt wird also aus den verbleibenden Intervallen das offene mittlere Drittel entfernt. Äquivalente Beschreibung (Warum?): C besteht genau aus denjenigen reellen Zahlen, die eine 3-adische Entwicklung besitzen, in der die 1 nicht vorkommt.
   Konstruiere eine natürliche Bijektion: $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to C$. Beweise, dass φ stetig ist und dass sein Inverses stetig ist (φ ist also ein Homöomorphismus). Mache eine Zeichnung und trage die Bilder der ganzen Zahlen $0, \dots, 15$ ein. Wo liegen $\varphi(-1)$ und $\varphi(\frac{1}{3})$?

3. **Das Haarmaß auf $\mathbb{Q}_2$.** Worauf bildet φ (aus Aufgabe 2) die Ideale $\mathbb{Z}_2$, $2\mathbb{Z}_2$ und $4\mathbb{Z}_2$ ab? Wie verhalten sich die Volumina dieser Ideale zueinander?

4. **Die Topologie auf $\mathbb{Q}_p$.** Beweise: Jede offene Teilmenge von $\mathbb{Z}_2$ ist eine endliche disjunkte Vereinigung von Nebenklassen der Form $x_i + p^{n_i}\mathbb{Z}_p$. Welches Volumen hat eine solche offene Menge? (Hierbei sei das Haarmaß so normiert, dass $\mathrm{vol}(\mathbb{Z}_p) = 1$)

5. **Stellen über p, über ∞.** Sei K ein Zahlkörper. Beweise:
   (a)
   $$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \prod_{\nu|\infty} K_\nu$$
   Hierbei durchläuft das Produkt über die $r_1 + r_2$ Äquivalenzklassen von Einbettungen: $K \to \mathbb{C}$, wobei zwei Einbettungen äquivalent heissen, wenn sie sich um eine komplexe Konjugation unterscheiden. K_ν ist $\mathbb{R}$ für reelle Einbettungen (also solche, deren Bild in $\mathbb{R}$ enthalten ist) und gleich $\mathbb{C}$ sonst.
   (b)
   $$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = \prod_{\nu|p} K_\nu$$
   Hier durchläuft ν die Äquivalenzklassen von Bewertungen von K, die den Betrag $|\cdot|_p$ fortsetzen, und K_ν ist die Komplettierung von K bzgl. des Betrages ν.

   Beide Aussagen lassen sich vereinen, sowohl im Sinne von Einbettungen (a), als auch im Sinne von Äquivalenzklassen von Beträgen (b). Wie?

Abgabe am 2.5.2012 im Seminarraum