Dr. Fritz Hörmann — Projektseminar Algebraische Zahlentheorie
Sommer 2012
Übungsblatt 2

---

1. **Die Zusammenhangskomponenten der Adelklassen.** Sei K ein Zahlkörper. Berechne die Zusammenhangskomponente der 1 in $\mathbb{A}_K/K$.

2. **Das Volumen von $\mathbb{A}_K/K$.** Nimm auf $\mathbb{A}_K$ das Produktmass aus dem gewöhnlichen Lebesque-Massen auf $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$ und den Massen auf den $\mathbb{Q}_p$, welche $\mathbb{Z}_p$ das Volumen 1 zuweisen. Dies induziert ein Mass auf $\mathbb{A}_K/K$, welches der Quotient nach dem diskreten Mass ist.

   Berechne $\mathrm{vol}(\mathbb{A}_K/K)$.

3. **Eingeschränkte Produkte.** Sei G eine algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$, also eine algebraische Varietät über $\mathbb{Q}$, mit Multipikation und Inversenbildung, die durch Polynome mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten beschrieben werden. Mit zu wenigen Vorkenntnissen, nimm an, dass $G = \mathrm{GL}_N$ (inkl. $N = 1$). Diese hat die Variablen $X_{1,1}, \dots, X_{N,N}, \xi$, und die Gleichung

$$\xi \cdot \det \begin{pmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N,1} & \cdots & X_{N,N} \end{pmatrix} = 1$$

   gilt.

   Definiere in sinnvoller Weise $G(R)$ für eine $\mathbb{Q}$-algebra R, und für fast alle p $G(\mathbb{Z}_p)$.

   Beweise

$$G(\mathbb{A}) = \prod_{\nu}{}' G(\mathbb{Q}_\nu),$$

   wobei das eingeschränkte Produkt bzgl. der für fast alle p definierten $G(\mathbb{Z}_p)$ gebildet ist.