Dr. Fritz Hörmann — Projektseminar Algebraische Zahlentheorie
Sommer 2012
Übungsblatt 4

---

1. **Dirichlet Charaktere.** Ein Dirichlet-Charakter ist ein Charakter
$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$$
für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$. Er heisst primitiv, wenn er nicht über ein kleineres $(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z})^*$ faktorisiert.

   Beweise: Es gibt eine Bijektion zwischen primitiven Dirichlet-Charakteren und Charakteren der Idelklassengruppe:
$$(\mathbb{A}^*)^1/\mathbb{Q}^* \to \mathbb{C}^*.$$

2. **Dirichlet-L-Reihe.** Sei χ ein primitiver Dirichlet-Charakter und ξ der entsprechende Idelklassencharakter. χ wird als Funktion auf $\mathbb{N}$ aufgefasst, indem es an Stellen mit $(n, N) \neq 1$ Null gesetzt wird. Sei f die charakteristische Funktion von $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$. Beweise:
$$\int_{\mathbb{A}_f^*} f(x)\xi(x)\|x\|^s dx^* = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$
Hier ist dx ist das Mass auf $\mathbb{A}_f^*$, welches wie in 3.1 normiert wird.

   Hinweis: Immitiere den Beweis von Lemma 3.2.

3. Auf $\mathbb{Q}_\nu$ (also $\mathbb{R}$ oder ein $\mathbb{Q}_p$) definieren wir die Fouriertransformation durch
$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{Q}_\nu} f(x)\chi_\nu(-xy)dx.$$
Hier ist dx^* ist das Lebesquemass auf $\mathbb{R}$, bzw. das additive Mass auf $\mathbb{Q}_p$, welches $\mathbb{Z}_p$ das Volumen 1 gibt und χ_ν der im Kurs besprochene Charakter, also $\chi_\infty(x) = \exp(2\pi i x)$ und $\chi_p(x) = \exp(2\pi i \underline{x})$. Hier ist $\underline{x}$ der Hauptteil von x, also das Bild unter dem Isomorphismus $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$, also z.B. für $p = 5$:
$$\underline{3 \cdot 5^{-2} + 4 \cdot 5^{-1} + 2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5^3 + \cdots} = 3 \cdot 5^{-2} + 4 \cdot 5^{-1} \mod \mathbb{Z}.$$
Die Funktion $f : \mathbb{Q}_\nu \to \mathbb{C}$ sollte eine sogenannte Schwartzfunktion sein, damit das Integral existiert (und $\widehat{f}$ ist dann selber wieder eine Schwartzfunktion). Die Konvergenzfragen sollten in dieser Aufgabe nicht zu ausfürlich behandelt werden.

   (a) Beweise formal, dass $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$.
   (b) Finde eine nicht verschwindende Funktion so, dass $\widehat{f} = f$.
   (c) Berechne
$$\int_{\mathbb{Q}_\nu^*} f(x)|x|^s dx^*$$
   für die Funktion aus (b). Hier ist dx^* das Mass, welches wie in 3.1 normiert ist ($\nu = p$) bzw. $\frac{dx}{|x|}$ ($\nu = \infty$).

   Hinweis zu (b): Versuche eine Funktion, welche der Gaussschen Glockenkurve ähnlich ist ($\nu = \infty$) bzw. eine Treppenfunktion ($\nu = p$).

4. Denke darüber nach, wie sich 1., 2. und 3. auf Zahlkörper verallgemeinern.