Dr. Fritz Hörmann — Projektseminar Algebraische Zahlentheorie
Sommer 2012
Übungsblatt 5

---

1. **Fouriertransformation auf $\mathbb{A}_K$.** Zur Fouriertransformation auf K_ν oder eben $\mathbb{A}_K$ benötigen wir stets einen nicht-trivialen additiven Charakter χ_0 und ein Mass dx. Die Fouriertransformierte ist dann durch

$$f \mapsto \{y \mapsto \widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{A}_K} f(x)\chi_0(-xy)dx\}$$

definiert. Wir sagen, dass dx selbstdual bzgl. χ_0 ist, falls $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$. Dies kann immer durch Multiplikation von dx mit einer geeigneten Konstanten erreicht werden.

Falls $\chi_0(K)$ trivial ist, beweise, dass dx genau dann selbst-dual ist, falls $\mathrm{vol}(\mathbb{A}_K/K) = 1$.

Hinweis: Poisson-Formel.

Beachte: Trotzdem hängt die Fouriertransformierte auch dann noch vom gewählten Charakter ab!

2. **Vollständige (Dedekindsche) Zetafunktion.** Wähle nun das Standardmass dx auf K_ν (d.h. das Lebesque-Mass auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sowie das Mass auf $K_\wp$, welche $\mathcal{O}_{K_\wp}$ das Volumen 1 gibt) und $\mathbb{A}_K$. Als $\chi_{0,K}$ wählen wir den additiven Charakter $\chi_0(\mathrm{tr}_{K|\mathbb{Q}}\, x)$, wobei χ_0 der Standardcharakter von $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ ist. Dieser ist trivial auf $\mathbb{Q}$. Multiplizieren wir das Mass dx auf $\mathbb{A}_K$ mit $\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{A}_K/K)} = 2^{r_2}\sqrt{|d_K|}^{-1}$ um ein selbst-duales Mass zu bekommen. Durch den Normierungsprozess in 3.1 bekommen wir ein Mass dx^* auf $\mathbb{A}_K^*$, $(\mathbb{A}_K^*)^1$ und $C_K^1 = (\mathbb{A}_K^*)^1/K^*$.

Sei I ein Ideal von K. Wir wählen für $f_{I,\wp}$ die charakteristische Funktion von $I \cdot \mathcal{O}_{K_\wp}$ und für $f_{I,\nu}$ die Funktion $\exp(-\pi x^2)$ bzw. $\exp(-4\pi x\overline{x})$ je nachdem, ob ν reell oder komplex ist. Ferner sei f_I das Produkt über alle ν dieser $f_{I,\nu}$.

Beweise: $\widehat{f_I}(x) = \sqrt{|d_K|}^{-1} N(I)^{-1} f_{I^{-1}\delta^{-1}}(x)$, wobei δ die Differente von K ist. (Erinnere: $N(\delta) = d_K$).

Berechne:

$$Z_I(K,s) = \int_{\mathbb{A}_K^*} f_I(x)\|x\|^s dx^* = N(I)^{-s}\int_{\mathbb{A}_K^*} f_{\mathcal{O}_K}(x)\|x\|^s dx^*$$

explizit für $s \geq 1$ (das zweite Gleichheitszeichen folgt aus $f_I(ix) = f_{\mathcal{O}_K}(x)$ für das zu I gehörige Idel i). Für endliche Stellen haben wir das bereits im Seminar gesehen und für unendliche benutze die Formel für das Gammaintegral.

Es folgt dann aus dem, was wir bewiesen haben: $|d_K|^{\frac{1}{2}s}Z(K,s)$ hat eine analytische Fortsetzung mit Residuen $\mathrm{vol}(C_K^1)$, bzw. $-\mathrm{vol}(C_K^1)$ bei $s=0$ und $s=1$ und:

$$|d_K|^{\frac{1}{2}s}Z(K,s) = |d_K|^{\frac{1}{2}(1-s)}Z(K,1-s).$$

Bitte wenden!

3. **Analytische Klassenzahlformel.** Berechne $\mathrm{vol}(C_K^1)$ für das Volumen aus 3.1.

   Hinweis: Dies ist eine quantitative Verfeinerung der Zerlegung von C_K^1, aus der wir die Endlichkeit der Klassenzahl und den Dirichletschen Einheitensatz abgelesen haben.

4. **Riemann-Roch II:** Manchmal wird auch die Aussage

$$\sum_{k \in K} f_{I^{-1}}(k) = \sqrt{|d_K|}^{-1} N(I) \sum_{k \in K} f_{I\delta^{-1}}(k)$$

   (welche aus der vorigen Aufgabe und der Poissonformel folgt) als 'Riemann-Roch' für Zahlkörper bezeichnet. Warum?