Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Tobias Schedlmaier

Universität Freiburg
WS 2016/17

Übungen zur Algebraischen Topologie – Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sind (C, ∂^C) und (D, ∂^D) Kettenkomplexe, so definieren wir einen Kettenkomplex $\operatorname{Hom}(C, D)$ durch die Vorschrift

$$(\operatorname{Hom}(C, D))_i = \prod_q \operatorname{Hom}(C_q, D_{q+i})$$

mit Differential $\partial(f) = \partial^D \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial^C$, wo wir $|f| = i$ schreiben für $f \in (\operatorname{Hom}(C, D))_i$. Man zeige, daß gilt $\partial(\partial(f)) = 0$, daß die Nullzykel des Hom-Komplexes gerade die Kettenabbildungen von C nach D sind, in Formeln $\mathcal{Z}_0 \operatorname{Hom}(C, D) = \operatorname{Ket}(C, D)$, und daß die nullte Homologie in natürlicher Weise identifiziert werden kann mit dem Raum der Morphismen von C nach D in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe, in Formeln $\mathcal{H}_0 \operatorname{Hom}(C, D) = \operatorname{Hot}(C, D)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei C ein Komplex von Vektorräumen. Man zeige, daß es in der Homotopiekategorie der Kettenkomplexe von Vektorräumen genau einen Isomorphismus $C \overset{!\sim}{\to} \mathcal{H}C$ gibt, der auf der Homologie die offensichtliche Identifikation $\mathcal{H}C \overset{\sim}{\to} \mathcal{H}(\mathcal{H}C)$ induziert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Wir betrachten ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen der Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E' \end{array}$$

Sind die beiden Horizontalen exakte Sequenzen und sind alle Vertikalen bis auf die mittlere Isomorphismen, so ist auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus. Diese Aussage heißt das Fünferlemma. Man bemerke, daß wir sogar bei der Vertikale ganz links nur die Surjektivität benötigen und bei der Vertikale ganz rechts nur die Injektivität.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Seien $f, g : (X, Z) \to (Y, T)$ zwei Morphismen zwischen Raumpaaren. Eine **Homotopie von** f **nach** g ist ein Morphismus von Raumpaaren $h : (X \times [0, 1], Z \times [0, 1]) \to (Y, T)$ derart, daß gilt $h \circ i_0 = f$ und $h \circ i_1 = g$. Man zeige: Sind zwei Morphismen $f, g : (X, Z) \to (Y, T)$ homotop, so induzieren sie dieselben Abbildungen $\mathrm{H}_q f = \mathrm{H}_q g : \mathrm{H}_q(X, Z) \to \mathrm{H}_q(Y, T)$ auf den relativen Homologiegruppen. Hinweis: Man wiederholt den alten Beweis. Man zeige durch ein Beispiel, daß es nicht ausreicht, nur vorauszusetzen, daß f und g als Abbildungen $X \to Y$ sowie als Abbildungen $Z \to T$ jeweils zueinander homotop sind.

Abgabefrist: Donnerstag, den 18. Mai in der Vorlesung.