Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Tobias Schedlmeier

Universität Freiburg
WS 2016/17

Übungen zur Algebraischen Topologie – Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Man zeige, daß es nicht möglich ist, die Kreislinie durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen mit zusammenhängendem Schnitt zu überdecken. Man zeige, daß es nicht möglich ist, die Sphäre durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen mit einfach zusammenhängendem Schnitt zu überdecken. Hinweis: Mayer-Vietoris-Sequenz.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei K ein Körper und $\mathrm{Id} : \mathrm{Mod}_K \to \mathrm{Mod}_K$ der Identitätsfunktor. Man bestimme alle Transformationen von diesem Funktor zu sich selber. Ebenso bestimme man alle Transformationen von diesem Funktor zum Bidualraumfunktor.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Variante des Yoneda-Lemmas: Für jeden Funktor $G\colon\ \mathrm{Top} \to \mathrm{Ab}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ab}^{\mathrm{Top}}(\mathrm{S}_q, G) &\to G(\Delta_q) \\ \delta &\mapsto \delta_{\Delta_q}(\tau_q) \end{aligned}$$

eine Bijektion von Mengen, wobei τ_q den tautologischen q-Simplex $\mathrm{id}\colon \Delta_q \to \Delta_q$ bezeichne.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Für einen topologischen Raum X faktorisiert die Abbildung $X \to \mathrm{H}_0\, X$, die jedem Punkt $x \in X$ den konstanten Nullsimplex mit Wert x zuordnet, über der Menge $\pi_0(X)$ der Wegzusammenhangskomponenten: $\pi_0(X) \to \mathrm{H}_0\, X$.

(a) Zeigen Sie, dass dadurch ein Isomorphismus zwischen den Funktoren $X \mapsto \pi_0(X)$ und $X \mapsto \mathrm{H}_0\, X$ induziert wird.
(b) Zeigen Sie auch die relative Version: Durch obige Abbildung wird ein Isomorphismus zwischen den Funktoren $(X, Z) \mapsto \{$Die freie abelsche Gruppe aller Elemente aus $\pi_0(X)$, die Z nicht treffen$\}$ und $(X, Z) \mapsto \mathrm{H}_0(X, Z)$ induziert.

Abgabefrist: Donnerstag, den 25. Mai in der Vorlesung.